Die Zentraflächen der Paraboloide und Mittelpunktsflächen zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

ACAD. LUGDBAT. BIBL.

vorgelegt von

Hans Schröder

aus Erfurt.

Halle a. S.
Buchdruckerei von Heinrich John
1913.

Referent: Geh. Reg.-Rat Dr. Wangerin.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 5

I. Abschnitt. Die Zentraflächen der Paraboloide.

A. Die Zentrafläche des elliptischen Paraboloides.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen 7

§ 2. Schnitte der Fläche mit den Symmetrieebenen 11

§ 3. Singularitäten der Fläche I: Die Rückkehrkanten . . 14

§ 4. Singularitäten des Parameternetzes 18

§ 5. Die Gestalt der Parameterkurven und der einzelnen Mäntel 23

§ 6. Singularitäten der Fläche II: Die Doppelkurve . . . 27

§ 7. Verhalten der Fläche im Unendlichfernen 35

§ 8. Die Modelle 41

B. Die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen und Gestalt der Mäntel . 41

§ 2. Die Doppelkurve 44

§ 3. Verhalten der Fläche im Unendlichfernen 47

§ 4. Die Modelle 54

C. Vergleichende Betrachtung der Zentraflächen eines Systemes von konfokalen Paraboloiden 54

II. Abschnitt. Die Zentraflächen zu den Mittelpunktsflächen zweiten Grades.

§ 1. Gestaltliche Diskussion der einzelnen Mäntel 61

§ 2. Die Doppelkurve 65

§ 3. Die Modelle 71

Einleitung.

Zentraflächen zu speziellen Flächen zweiten Grades sind schon untersucht worden. Herr Caspary hat im Crelleschen Journal Bd. 81 S. 143 ff. die des elliptischen Paraboloides eingehend behandelt. Er betrachtet die Zentrafläche im Zusammenhang mit dem Normalenproblem des elliptischen Paraboloides, d. h. der Frage nach der Zahl der Normalen eines elliptischen Paraboloides durch einen Raumpunkt, und ermittelt die Singularitäten der Zentraflächen dadurch, dass er untersucht, für welche Punkte zwei oder mehrere der durch ihn gehenden Normalen des elliptischen Paraboloides zusammenfallen. Er bestimmt weiter die charakteristischen Zahlen der Fläche und ihrer Doppelkurve. Bei dieser Untersuchung werden aber die beiden Mäntel der Zentrafläche nicht unterschieden; ein Versuch, eine Anschauung der Fläche und ihres Verhältnisses zum elliptischen Paraboloid zu vermitteln, wird nicht gemacht. Die Fläche wird nur als algebraische Fläche, nicht in ihrer Eigenschaft als Zentrafläche untersucht.

Anders geht Cayley vor (Cambridge Philos. Transactions vol. XII pg. 319 ff.), der die beiden reellen Mäntel der Zentrafläche eines Ellipsoides einzeln diskutiert und auch kurz die Kurven, in denen die Normalen des Ellipsoides längs einer Krümmungskurve berühren, untersucht. Er behandelt weiter die Doppelkurve und zeigt, dass sie nicht nur aus der Durchdringungskurve der beiden reellen Mäntel besteht, sondern diese noch in reellen isolierten Bögen fortsetzt, die nicht auf reellen Schalen der Fläche liegen. Die Diskussion der Doppelkurve wird aber nur für den Fall durchgeführt, dass zwischen den Achsenquadraten $a > b > c$ des Ellipsoides die Beziehung $a - b < b - c$ besteht.

Im Anschluss an Cayley hat Herr W. Dyck die Zentrafläche des einschaligen Hyperboloides betrachtet und modelliert (Math. Mod. angef. im math. Instit. des K. Polytechnikums in

München Abt. II, 3: Die Zentrafläche des einschaligen Hyperboloides), wobei bei der Behandluug der Doppelkurve zwischen den drei Fällen $a - b \gtreqless b - c$ unterschieden wird. In gleicher Weise hat Herr L. Schleiermacher eine Fläche untersucht, die gestaltlich ähnliche Verhältnisse darbietet, wie die Zentrafläche eines elliptischen Paraboloides (Math. Mod. angef. im math. Institut des K. Polytechnikums in München Abt. II, 2: Die Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungsmittelpunkte des elliptischen Paraboloides in kollinearer Verwandschaft steht).

In der vorliegenden Arbeit ist der Hauptwert darauf gelegt, von den Zentraflächen aller Flächen zweiten Grades eine Anschauung zu verschaffen und sie mit Rücksicht auf ihre Entstehung aus den Flächen zweiten Grades zu betrachten. Darum habe ich mich im allgemeinen auf die Betrachtung der reellen Punkte der Flächen beschränkt und dabei meist die Behandlungsweise Cayleys angewandt. In der Behandlung der Singularitäten der Fläche und in der Betrachtung der isolierten Zweige der Doppelkurve bin ich von Cayleys Verfahren abgewichen, der hier, um die isolierten Zweige in reeller Form darzustellen, einen Parameter einführt, der mit der Eigenschaft der Fläche als Zentrafläche in keinem Zusammenhang steht. Bei den Mittelpunktsflächen habe ich auch die Fälle $a - b \geqq b - c$ in die Diskussion eingeschlossen. Weiter ist untersucht, in welcher Weise die Zentrafläche ihre Form ändert, wenn man die Fläche zweiten Grades in die zu ihr konfokalen Flächen durch stetige Veränderung der Konstanten überführt.

Im ersten Abschnitt werden die Zentraflächen der Paraboloide untersucht und zwar zuerst die des elliptischen Paraboloides, dann in weit kürzerer Form die Zentrafläche eines hyperbolischen Paraboloides. Der zweite Abschnitt befasst sich mit den Zentraflächen eines Systems von konfokalen Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt.

Die Abhandlung begleitet eine Reihe von Modellen, die die Mäntel der Zentrafläche des elliptischen Paraboloides einzeln und zusammen, die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides und die des Ellipsoides darstellen.

I. Abschnitt. Die Zentraflächen der Paraboloide.

A. Die Zentrafläche eines elliptischen Paraboloides.

§ 1. Aufstellung ihrer Gleichungen.

Wir bezeichnen mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten eines Punktes der „Urfläche", d. h. der Fläche, deren Zentrafläche wir untersuchen wollen, mit $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die Koordinaten eines Punktes der Zentrafläche selbst. In den Figuren ist das Koordinatensystem so orientiert, dass x- und z-Achse in der Zeichenebene liegen, und die Richtung der zunehmenden Werte von y die vom Beschauer wegführende ist.

Um die Zentrafläche eines elliptischen Paraboloides zu finden, führt man parabolische Koordinaten ein[1]). Die Formeln gestalten sich besonders symmetrisch, wenn man als Koordinatenanfangspunkt des kartesischen Systems den Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke $F_1 F_2$ der beiden Brennpunkte, als x y-Ebene und x z-Ebene die Symmetrieebenen des Paraboloides nimmt und die parabolischen Koordinaten durch das System der zur Urfläche konfokalen Flächen bestimmt. Dann lautet die Gleichung der Urfläche in kartesischen Koordinaten

$$1) \qquad \bar{x} - \frac{a+b}{8} + \frac{\bar{y}^2}{a} + \frac{\bar{z}^2}{b} = 0$$

wobei a und b ($a > b$) zwei positive Grössen sind, und die Transformationsgleichungen zwischen den parabolischen (λ, μ, ν) und kartesischen Koordinaten (x, y, z) sind:

$$2) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(\lambda+\mu+\nu) \\ y &= \pm\sqrt{-\frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{4(a-b)}} \\ z &= \pm\sqrt{-\frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{4(b-a)}}. \end{aligned}$$

[1]) Encykl. d. math. Wiss. III. A. B. I. F. Müller, Die verschiedenen Koordinatensysteme pg. 680.

Reell werden die rechten Seiten aller drei Gleichungen nur, wenn man die parabolischen Koordinaten auf bestimmte Variabilitätsbereiche beschränkt, und zwar

$$\begin{aligned} \lambda &\text{ auf } b_1: && -\infty \leqq \lambda \leqq b \\ \mu &\text{ „ } b_2: && b \leqq \mu \leqq a \\ \nu &\text{ „ } b_3: && a \leqq \nu \leqq \infty \end{aligned}$$

Setzt man eine der Grössen λ, μ, ν konstant, so erhält man eine zu 1) konfokale Fläche. $\lambda = 0$ liefert die Urfläche selbst. Ein Paraboloid $\lambda =$ konst. $\neq 0$ ist ebenso wie 1) nach der Seite der abnehmenden Abscissen geöffnet, es hat im Endlichen mit 1) keine reellen Punkte gemein. Wir wollen die Flächen $\lambda =$ konst. „gleichartige" Flächen zur Urfläche 1) nennen. Von ihnen unterscheiden wir die „ungleichartigen" Flächen $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. erstere hyperbolische, letztere elliptische, aber nach der Seite der wachsenden Abscissen geöffnete Paraboloide, die die Fläche 1) in ihren Krümmungskurven schneiden[1]). Die Schnittkurven der Flächen $\mu =$ konst. bezeichnen wir als Krümmungskurven erster Art, die der Flächen $\lambda =$ konst. als Krümmungskurven zweiter Art.

Bestimmt man unter Benutzung dieser Tatsache und der Orthogonalitätseigenschaften der konfokalen Flächen zweiten Grades nach dem üblichen Verfahren[2]) die Zentrafläche zu der Fläche, die sich aus 2) für $\lambda = 0$ ergibt, so ergibt sich die Parameterdarstellung

$$3\,a) \qquad \begin{aligned} \overline{\xi}_1 &= \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(\mu + 3\nu) \\ \overline{\eta}_1 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\mu)\,(a-\nu)^3}{a\,(a-b)}} \\ \overline{\zeta}_1 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\mu)\,(b-\nu)^3}{b\,(b-a)}} \end{aligned}$$

---

[1]) Encykl. d. math. Wiss. III. C. 2: Staude: Flächen zweiter Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven.

[2]) Vergl. z. B. Scheffers: Anwendung der Diff. und Int.-Rechnung auf Geometrie II. Bd. IV. § 5.

für den ersten Mantel und

$$\bar{\xi}_2 = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(3\mu+\nu)$$

3b)
$$\bar{\eta}_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\mu)^3(a-\nu)}{a(a-b)}}$$

$$\bar{\zeta}_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\mu)^3(b-\nu)}{b(b-a)}}$$

für den zweiten Mantel.

Die allgemeine Theorie der Zentraflächen lehrt[1]), dass auf jedem Mantel die Kurven, in deren Punkten er von den Normalen der Urfläche längs der Krümmungskurven berührt wird, zu einander konjugiert sind. Auf beiden Mänteln 3a) und 3b) sind also die Kurven $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. zu einander konjugiert. Ferner sind[2]) auf jedem Mantel die Kurven der einen Schar, nämlich die, die von den Normalen der Urfläche längs einer Krümmungslinie eingehüllt werden, die Kurven $\mu =$ konst. auf dem ersten, die Kurven $\nu =$ konst. auf dem zweiten Mantel geodätische Linien auf der Zentrafläche. Um diesen Charakter der Kurven gleich in der Formel zum Ausdruck zu bringen, wollen wir den Parameter der geodätischen Kurven mit γ, den der dazu konjugierten Parameterkurven mit $\varkappa$ bezeichnen. Aus dem Gleichungstripel 3a) wird dann

$$\bar{\xi} = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(\gamma+3\varkappa)$$

4)
$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\gamma)(a-\varkappa)^3}{a(a-b)}}$$

$$\bar{\zeta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\gamma)(b-\varkappa)^3}{b(a-b)}}$$

Man sieht aber, dass das zweite Gleichungstripel genau dieselbe Form annimmt, da man hier ν durch γ und μ durch $\varkappa$ zu ersetzen hat, dass also die Gleichungen 4) auch den zweiten Mantel der Zentrafläche darstellen, wenn man nur $\varkappa$ aus dem Bereich b_2 und γ aus b_3 entnimmt. Die beiden Mäntel sind also Teile desselben analytischen Gebildes.

[1]) Scheffers a. a. O. 4. Abschnitt, § 5, Satz 32.
[2]) Scheffers a. a. O. 4. Abschnitt, § 5, Satz 28.

Ausser ihnen hat dieses aber keine reellen Teile, anderen reellen Werten von $\varkappa$ und γ entsprechend. Denn die Gleichungen 4) liefern reelle Werte von $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ nur, wenn γ ein Wert von b_2 und $\varkappa$ ein solcher von b_3 ist, oder umgekehrt. $\varkappa$ und γ müssen also im allgemeinen von einander verschieden sein. Nur die Werte $\gamma = a$ und $\varkappa = a$ sind gleichzeitig zulässig, da a den Bereichen b_2 und b_3 gleichzeitig angehört. In diesem Falle werden die sich aus 4a) und 4b) ergebenden Werte der Koordinaten dieselben: in den den Werten $\gamma = a$, $\varkappa = a$ entsprechenden Punkten hängen die beiden Mäntel zusammen.

Es gilt also:

Satz 1: *Die Zentrafläche zum elliptischen Paraboloid* 2) *wird dargestellt durch die Gleichungen*

$$\bar{\xi} = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(\gamma + 3\varkappa)$$

$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\gamma)\,(a-\varkappa)^3}{a\,(a-b)}}$$

$$\bar{\zeta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\gamma)\,(b-\varkappa)^3}{b\,(b-a)}}.$$

Und zwar liefern die Werte

$$b \leqq \gamma \leqq a \qquad a \leqq \varkappa \leqq \infty$$

den ersten Mantel, den Ort der zu den Krümmungskurven erster Art gehörenden Krümmungsmittelpunkte; und die Werte

$$a \leqq \gamma \leqq \infty \qquad b \leqq \varkappa \leqq a$$

den zweiten Mantel, den Ort der zu den Krümmungskurven zweiter Art gehörenden Krümmungsmittelpunkte. Beide Mäntel hängen in den sich für $\gamma = a$, $\varkappa = a$ ergebenden Punkten zusammen.

Da sich ξ, η und ζ nur durch algebraische Operationen aus γ und $\varkappa$ herleiten, folgt:

Satz 2: *Die Zentrafläche des elliptischen Paraboloides ist algebraisch.*[1])

---

[1]) Die Fläche ist neunten Grades und 4. Klasse. Caspary a. a. O. pg. 148 Satz I, pg. 189 Satz II.

§ 2. Schnitte der Fläche mit den Symmetrieebenen.

Aus den Symmetrieeigenschaften der Urfläche notwendig folgend und aus den Gleichungen 4) ohne weiteres zu ersehen ist der

Satz 3. *Die Symmetrieebenen des Paraboloides sind auch Symmetrieebenen seiner Zentrafläche.*

Die Symmetrieebenen sind also die Koordinatenebenen $\eta = 0$ und $\zeta = 0$.

Nach Gleichung 4) wird $\zeta = 0$

1. für $\gamma = b$. Dann wird

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(3a - b) + \frac{3}{4}(a - \varkappa)$$

5)
$$\bar{\eta} = +\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a - \bar{\varkappa})^3}{a}}$$

Ist $\gamma = b$, so ist $\varkappa \geqq a$, die Gleichung 5) stellt also eine nach der Seite der abnehmenden Abscissen sich erstreckende Neilsche Parabel, die Evolute der Schnittkurve des Paraboloides 1) mit der Ebene $z = 0$ dar, die ihren Rückkehrpunkt bei S_1 $\left(\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(3a - b)\right)$ auf der ξ-Achse hat.

2. für $\varkappa = b$. Dann wird

$$\bar{\xi} = \frac{1}{8}(a - 3b) + \frac{1}{4}(a - \gamma)$$

6)
$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a - b)^2(\gamma - a)}{a}}.$$

Jetzt ist $\gamma \geqq a$, die Gleichungen 6) stellen also eine nach der Seite der abnehmenden Abscissen geöffnete Parabel mit dem Scheitel S_2 $\left(\bar{\xi} = \frac{1}{8}(a - 3b)\right)$ auf der ξ-Achse dar. (Fig. 1.)

Satz 4. *Der Schnitt der Zentrafläche mit der Symmetrieebene $\zeta = 0$ setzt sich zusammen aus einer Neilschen Parabel als Schnitt des ersten Mantels und einer gewöhnlichen Parabel als Schnitt des zweiten Mantels.*

Die beiden Kurven 5) und 6) haben zwei Punkte P und P′ gemein. Für $\varkappa = 3a - 2b$ bezw. $\gamma = 9a - 8b$ wird nämlich

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(15\,a - 13\,b)$$

$$\bar{\eta} = \pm\sqrt{\frac{2\,(a-b)^3}{a}}.$$

η verschwindet, wenn

1. $\gamma = a$ ist. Dann wird

7)
$$\bar{\xi} = \frac{1}{8}(a \quad 3\,b) - \frac{3}{4}(x - b)$$

$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-b)^3}{b}}$$

Dies ist die Gleichung einer Neilschen Parabel, der Evolute der Schnittkurve des Paraboloids 1) mit der Ebene $y = 0$. Sie hat ihren Rückkehrpunkt bei $\xi = \frac{1}{8}(a - 3\,b)$, also im Punkte S_2 der ξ-Achse. Da $\gamma = a$ sowohl dem Bereiche b_2 als dem Bereiche b_3 angehören kann, sind für x alle Werte $x > b$ zulässig. Die Neilsche Parabel gehört demnach nicht in ihrem ganzen Verlauf zu einem bestimmten Mantel. Auf dem ersten Mantel ($x > a$) liegen die beiden Bögen, die sich von den beiden Punkten C_1 und C_2, deren Koordinaten

$$\bar{\xi}_1 = -\frac{1}{8}(5\,a - 3\,b) \qquad \bar{\xi}_2 = -\frac{1}{8}(5\,a - 3\,b)$$

bezw.

$$\bar{\eta}_1 = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^3}{b}} \qquad \bar{\eta}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^3}{b}}$$

sich aus 7) für $x = a$ ergeben, nach der Seite der abnehmenden Abscissen ins Unendliche ziehen. Auf dem zweiten Mantel liegt das den Rückkehrpunkt S_2 enthaltende Restsegment $C_1 S_2 C_2$ (Fig. 2).

2. wird $\eta = 0$ für $x = a$. Aus 4. folgt dann

8)
$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(3\,a - b) - \frac{1}{4}(\gamma - b)$$

$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^2\,(\gamma - b)}{b}}.$$

8) ist die Gleichung einer gewöhnlichen Parabel mit dem Scheitel S_1 $\left(\bar{\xi} \quad -\frac{1}{8}(3\,a - b)\right)$ auf der ξ-Achse. Auf dem ersten

Mantel liegt das Segment $C_1 S_1 C_2$, das den Scheitel enthält und durch dieselben Punkte C_1 und C_2, die jetzt die Gleichungen 8) für $\gamma = a$ liefern, begrenzt wird; zum zweiten Mantel gehören die sich von den Punkten C_1 und C_2 nach der Seite der abnehmenden Abscissen ins Unendliche erstreckenden Bögen. Beachtet man noch, dass sowohl aus 7) als aus 8) für die Punkte C_1 und C_2

$$\frac{d\,\overline{\beta}}{d\,\overline{\xi}} = \pm\sqrt{\frac{a-b}{b}} \quad \text{ist,}$$

und dass ferner C_1 und C_2 die sich für $\gamma = a$ und $\varkappa = a$ ergebenden Punkte sind, in denen nach Satz 1 die beiden Mäntel zusammenhängen, so folgt:

Satz 5. *Der Schnitt der Zentrafläche mit der Ebene* $\eta = 0$ *zerfällt in eine Neilsche und eine gewöhnliche Parabel, die sich in zwei symmetrischen Punkten* C_1 *und* C_2*, den Punkten, in denen die beiden Mäntel zusammenhängen, berühren. In diesen Punkten tritt jede der beiden Kurven aus dem einen Mantel in den andern über.*

Dass die Neilsche Parabel 7) als Evolute einer Krümmungskurve der Urfläche nicht ganz auf einem Mantel liegt, sondern über beide Mäntel verläuft, hat aus der geometrischen Erzeugung der Fläche seinen Grund darin, dass die beiden Nabelpunkte der Urfläche deren Schnitt mit der Symmetrieebene in Abschnitte teilen. Das von den Nabelpunkten begrenzte Segment ist Krümmungskurve zweiter Art, die beiden sich von den Nabelpunkten ins Unendliche erstreckenden Bogen bilden hingegen eine Krümmungskurve erster Art. Die Normalen in Punkten dieser Bogen berühren also den ersten Mantel der Zentrafläche in Punkten einer geodätischen Kurve, während er von den Normalen jenes begrenzten Segments in Punkten einer konjugierten Kurve (dem Parabelsegment $C_1 S_1 C_2$) berührt wird. Die Schnittkurve der Urfläche mit der Ebene $z = 0$ ist in ihrer ganzen Ausdehnung Krümmungskurve erster Art. Infolgedessen liegt auch ihre Evolute ganz auf dem ersten Mantel.

§ 3. Singularitäten der Fläche.

1. Rückkehrkanten.[1])

Ein Punkt einer Fläche ist singulär, wenn ihm entweder überhaupt keine bestimmte Normale zukommt, oder die Grenzlage, der sich die Normale nähert, wenn man von einem Nachbarpunkte zu dem in Frage stehenden übergeht, nicht von der Lage des Nachbarpunktes und dem Wege unabhängig ist. Wendet man die allgemeinen Formeln[2]) für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normalen in einem Punkte einer Fläche auf die Gleichungen 4) an, so folgt:

$$X = \sqrt{\frac{(a-\varkappa)\,(b-\varkappa)}{(\varkappa-\gamma)\cdot\varkappa}}$$

$$Y = +\sqrt{\frac{a\,(\gamma-a)\,(b-\varkappa)}{(a-b)\,(\varkappa-\gamma)\,\gamma}}$$

$$Z = \pm\sqrt{\frac{b\,(a-\varkappa)\,(b-\gamma)}{(a-b)\,(\gamma-\varkappa)\,\varkappa}}$$

Für Werte des Parameters $\varkappa$ die von a und b verschieden sind, ermitteln sich also X, Y und Z eindeutig. (Die verschiedenen Vorzeichen beziehen sich auf die vier verschiedenen zur Ebene $\eta = 0$ bezw. $\zeta = 0$ symmetrischen Punkte, die denselben Werten γ und $\varkappa$ entsprechen.) Für $\varkappa = a$ oder $\varkappa = b$ verschwinden jedoch zwei der Grössen, die dritte wird ± 1. Z. B. für $\varkappa = a$ verschwinden X und Z. Y wird $+1$. Beide in Frage kommenden Werte von Y gehören aber zu demselben Punkte γ_0 der Kurve $\varkappa = a$, da die zur Ebene $\eta = 0$ symmetrischen Punkte $(\gamma_0, \varkappa = a + \varepsilon)$ in die Ebene $\eta = 0$ zusammen rücken, wenn ε verschwindet. Die Normale in einem Punkte der Kurve $\varkappa = a$ steht senkrecht auf der Ebene $\eta = 0$ und zwar in der Richtung der abnehmenden oder der zunehmenden Werte von η, je nachdem man sich von einem Punkte mit negativem oder positivem η der Kurve $\varkappa = a$ nähert. Die Ebene $\varkappa = 0$ ist Tangentialebene, die Kurve $\varkappa = a$ eine Rückkehrkante. Da sich ein analoges Resultat für die Kurve $\varkappa = b$ ergibt, so folgt:

---

[1]) Die hier verfolgte Methode, die Singularitäten der Fläche durch das Unbestimmtwerden der Richtungskosinus der Normalen zu untersuchen, weicht von dem Cayleyschen Verfahren ab.

[2]) Scheffers a. a. O. pg. 27.

Satz 6. *Die in den Symmetrieebenen liegenden konjugierten Kurven sind Rückkehrkanten der Fläche.*

Dieses Ergebnis gewinnt an Anschaulichkeit, wenn man sich überlegt, was die Parabeln 6) und 8) als konjugierte Kurven für die Fläche bedeuten. In der Parabel 6) berühren die Normalen der Krümmungskurve erster Art $\mu = b$ den ersten Mantel. Ist n_1 die Normale im Punkte $\mu = b$, $\nu = \nu_0$, so schneidet sie sich im Punkte $\varkappa = b$, $\gamma = \nu_0$ nicht nur mit einer, sondern mit den beiden symmetrischen Normalen, deren Fusspunkte die Parameter $\mu = b + \varepsilon$, $\nu = \nu_0$ haben, so dass die Kurven $\varkappa = a$ von Schnittpunkten dreier benachbarten Normalen gebildet werden. Im Schnittpunkt einer Krümmungskurve $\nu = \nu_0$ mit dem Hauptschnitt $\mu = b$ hat der eine Hauptkrümmungsradius r_2 verglichen mit seinen Werten in benachbarten Punkten von $\nu = \nu_0$ einen extremen Wert.

Bei der Untersuchung der Kurven $\varkappa = a$ waren die Punkte $\gamma = a$ derselben stillschweigend ausgenommen. Für diese werden X, Y und Z gleichzeitig unbestimmt. Je nach der Art, wie man zu den Punkten $\varkappa = a$, $\gamma = a$, d. s. die Punkte C_1 und C_2, übergeht, erhält man verschiedene Werte von X, Y und Z. Um über den geometrischen Charakter dieser Punkte näheren Aufschluss zu erhalten,[1]) schneiden wir die Fläche im Punkte C_1 mit einer Ebene, die zur Ebene $\eta = 0$ senkrecht steht, also mit einer Ebene

$$\mathfrak{Z} - \bar{\mathfrak{Z}}_1 = m\,(\xi - \bar{\xi}_1)\,^1),$$

wo $\bar{\xi}_1$ und $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ die auf Seite 11 erklärten Werte sind. Wir wollen die dem Werte a benachbarten Grössen γ und $\varkappa$ in der Form

$$\gamma = a + \varepsilon_1$$
$$\varkappa = a + \varepsilon_2$$

darstellen. In der Umgebung des Punktes C_1 können wir dann die Gleichungen 4) ersetzen durch

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_1 = -\frac{3\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{4}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\varepsilon_1\,\varepsilon_2^{\,3}}{a\,(a-b)}}$$

$$\bar{\mathfrak{Z}} - \bar{\mathfrak{Z}}_1 = -\frac{3\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{4}\sqrt{\frac{a-b}{b}} - \frac{\varepsilon_1^{\,2} - 6\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 - 3\,\varepsilon_2^{\,2}}{16\sqrt{b\,(a-b)}} + \ldots$$

[1]) Schleiermacher untersucht diese Stelle durch einen einzigen Schnitt parallel zur Ebene $\xi = 0$ und vergleicht diesen mit zwei Nachbarschnitten. (a. a. O. S. 4—5). Die hier gegebene Betrachtung ist schärfer.

Soll $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}_1$, $\bar{\zeta}$ ein Punkt der Schnittebene sein, so muss

$$\varepsilon_1 = -2\varepsilon_2 + \frac{3\varepsilon_2^2}{\left(m - \sqrt{\frac{a-b}{b}}\right)\sqrt{b(a-b)}} + \cdots$$

Dabei ist vorauszusetzen, dass m von $\sqrt{\frac{a-b}{b}}$ verschieden ist, d. h. dass die Hilfsebene nicht die gemeinsame Tangente der Kurven $\lambda = a$ und $\gamma = a$ in der Ebene $\eta_1 = 0$ enthält. Somit wird

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_1 = -\frac{3\varepsilon_2^2}{\left(m - \sqrt{\frac{a-b}{b}}\right)\sqrt{b(a-b)}} + \text{Glied. dritt. Ordn.}$$

$$\bar{\eta}_1 = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{a(a-b)}}\,\varepsilon_2^2 + \text{Glieder höh. Ordn.}$$

$$\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1 = -\frac{3\varepsilon_2^2 m}{4(m\sqrt{(a-b)b} - a + b)} + \text{Glieder höh. Ordn.}$$

In erster Annäherung wird also die Schnittkurve durch zwei symmetrische vom Punkte C_1 ausgehende Halbstrahlen g_1 und g_2 dargestellt. (Fig. 3.) Die Berücksichtigung der nicht verschwindenden Glieder dritter Ordnung ergibt Abweichungen von dieser Figur. Bedenkt man, dass ein Wechsel des Vorzeichens von ε_2 einen Uebergang aus dem einen Mantel in den anderen bedeutet, so ergibt sich, dass die Schnittkurve des einen Mantels in von C_1 verschiedenen Punkten grössere Werte von $\bar{\zeta}$ hat als die beiden Halbstrahlen, während die des anderen Mantels kleinere Werte von $\bar{\zeta}$ hat, sodass sich für die Schnittfigur das in Fig. 3 dargestellte Bild bietet. Die Schnittfigur jedes Mantels allein hat in C_1 eine Ecke, die Tangenten in C_1 sind die Geraden g_1 und und g_2. Dieses singuläre Verhalten, das Springen des Differentialquotienten längs der Schnittkurve um einen endlichen Betrag, steht aber mit dem algebraischen Charakter der Fläche nicht im Widerspruch. Man muss beachten, dass die Schnittkurve einer Ebene mit einem einzigen Mantel im allgemeinen kein selbstständiges analytisches Gebilde sein wird, wie es sich für die Symmetrieebenen als Schnittebenen ergab; denn dann müsste auch jeder Mantel für sich ein selbstständiges analytisches Gebilde sein. Man hat vielmehr die Schnittkurven der Ebene mit beiden

Mänteln als Ganzes aufzufassen. Dann ergibt sich, dass in dem Punkte C_1 zwei Rückkehrpunkte mit verschiedenen zur Ebene $\eta = 0$ symmetrisch liegenden Spitzentangenten zusammenfallen, dass also die direkte Fortsetzung eines Bogens, z. B. PC_1, nicht über C_1 hinaus mit sprunghaft drehender Tangente in den Halbraum $\eta > 0$ führt, sondern mit stetig drehender Tangente nach Q. Obgleich ich dabei vorgreifend Resultate späterer Betrachtungen benutze, möchte ich nicht darauf verzichten, dieses Verhalten durch eine Kontinuitätsbetrachtung zu erläutern. Bekanntlich entsteht bei kontinuierlicher Deformation einer algebraischen Kurve unter Erhaltung ihrer Ordnung beim Übergang eines reellen Doppelpunktes in einen isolierten eine Spitze. Legen wir nun durch einen Punkt P, dem Parameterwert $\varkappa = a - \varepsilon$ entsprechend, auf der Kurve $\gamma = a$ eine Ebene normal zu dieser, so ist diese senkrecht zur Ebene $\eta = 0$ und infolgedessen nach Satz 6 auch Normalebene zum anderen Mantel in ihrem Schnittpunkt $\bar{P}$ mit der Kurve $\varkappa = a$. Da die Fläche in P regulär ist und $\bar{P}$ auf der Rückkehrkante liegt, setzt sich die Schnittkurve aus zwei Teilen zusammen, deren einer in der Umgebung von P durch eine gewöhnliche Parabel, deren anderer in der Umgebung von $\bar{P}$ durch eine Neilsche Parabel approximiert werden kann. Ist $\varepsilon > 0$, so schneidet diese Normalebene die Doppelkurve der Fläche (vergl. Seite 30 ff.) in zwei zur Ebene $\eta = 0$ symmetrischen auf der Fläche liegenden Punkten; es wird also die Schnittkurve zwei reelle Doppelpunkte besitzen. Mit abnehmendem ε rücken P und $\bar{P}$ sowie die Doppelpunkte auf den Punkt C_1 zusammen, die letzteren werden zu isolierten Doppelpunkten für $\varepsilon < 0$ während P und $\bar{P}$, nachdem ε durch Null durchgegangen ist, wieder auseinanderrücken (Fig. 4—6). Beim Übergang von positiven zu negativen Werten von ε gehen also zwei Doppelpunkte in isolierte über, so dass man im Grenzfall $\varepsilon = 0$ zwei Spitzen zu erwarten hat, die in den Punkt C_1 zusammenfallen.

Die Betrachtungen auf Seite 16 verloren ihre Gültigkeit, wenn die in der Gleichung der Schnittebene auftretende Konstante m den Wert

$$m = \sqrt{\frac{a - b}{b}}$$

annahm, d.h. wenn die Ebene die gemeinsame Tangente der Kurven 7) und 8) im Punkte C_1 enthielt. In diesem Falle ergibt die Bedingung

$$m\,(\bar{\xi} - \bar{\xi}_1) = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1$$

in erster Annäherung die Beziehung

$$\varepsilon_1^{\,2} - 6\varepsilon_1\,\varepsilon_2 - 3\varepsilon_2^{\,2} = 0$$

oder

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2\,(3 \pm \sqrt{12})\,.$$

Der Wert $\varepsilon_1 = \varepsilon_2\,(3 + \sqrt{12})$ hat dasselbe Zeichen wie ε_2. Die entsprechenden Werte von γ und $\varkappa$ liegen also in demselben Bereiche b_i, sodass die Gleichungen 4) nicht reelle Werte für alle drei Grössen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ liefern.

Für

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2\,(3 - \sqrt{12})$$

ergibt sich

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_1 = -\frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{3})\,\varepsilon_2 + \cdots,$$

$$\bar{\eta}_1 = \pm\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 - \sqrt{12}}{a\,(a-b)}}\,\varepsilon_2^{\,2} + \cdots$$

$$\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1 = -\frac{1}{2}\,(3 - \sqrt{3})\,\sqrt{\frac{a-b}{b}}\,\varepsilon_2 + \cdots\,.$$

Die Schnittkurve lässt sich also in der Nachbarschaft des Punktes C_1 durch zwei sich in ihren Scheiteln berührende Parabeln approximieren, deren gemeinsame Achse zur Ebene $\eta_1 = 0$ senkrecht steht.

§ 4. Singularitäten des Parameternetzes.

Es besteht nicht die Absicht, in diesem Paragraphen alle auftretenden Singularitäten des Parameternetzes zu erörtern; es kommt mir nur darauf an, die Singularität der Kurven $\gamma = a$ und $\gamma = b$ zu erläutern. Und zwar aus folgendem Grunde. Nach den Gleichungen 4) sind $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ im allgemeinen reguläre Funktionen von γ, $\varkappa$, und man kann schon daraus auf den regulären Charakter eines Punktes $(\gamma, \varkappa)$ der Fläche (wenigstens für den einzelnen Mantel) schliessen. Singuläres Verhalten zeigen hingegen die $\bar{\eta}$ oder $\bar{\zeta}$ für Werte $\varkappa = a$ und $\varkappa = b$, denen nach Satz 6 die Rückkehrkanten der Fläche entsprechen, aber ausserdem auch noch für die Werte $\gamma = a$ und $\gamma = b$, für die auch entweder $\bar{\eta}_1$

oder $\bar{\zeta}$ nicht in Potenzreihen entwickelbar sind; trotzdem sind die Richtungskosinus der Normalen im allgemeinen (Ausnahme $\gamma = a$ und $\varkappa = a$) bestimmt, so dass die Fläche sich in den Punkten der Kurven $\gamma = a$ oder $\gamma = b$ regulär verhält. Die Singularität von $\bar{\eta}$ bezw. $\bar{\zeta}$ kann also nur durch das Parameternetz bedingt sein, die Kurven $\gamma = a$ und $\gamma = b$ müssen für das Parameternetz auf der Fläche eine besondere (singuläre) Bedeutung haben.

Nun ist der Zweck zweier Parameter $\varkappa$ und γ auf einer Fläche der, wenigstens innerhalb eines nicht verschwindenden Bereiches auf der Fläche einen Punkt eindeutig festzulegen, also so, dass mit zwei Werten $\varkappa$ und γ auch ein Punkt in diesem Bereich eineindeutig festgelegt ist. Erfüllt ein Parametersystem in der Umgebung eines Punktes γ_0, $\varkappa_0$ diese Bestimmung, so entsprechen den vier Wertpaaren $\gamma_0 \pm d\gamma$, $\varkappa_0 \pm d\varkappa$ vier von einander verschiedene Punkte der Umgebung des Punktes $(\gamma_0, \varkappa_0)$, Eckpunkte eines Vierecks, das den Punkt $(\gamma_0, \varkappa_0)$ in seinem Innern enthält, und sich beliebig wenig von einem Parallelogramm unterscheidet, wenn $d\gamma$ und $d\varkappa$ hinreichend klein sind. Deutet man γ und $\varkappa$ als rechtwinkelige Koordinaten in einer Ebene, so bewirkt die Zuordnung der Werte $\gamma, \varkappa$ zu den Punkten der Fläche eine in der Umgebung des Flächenpunktes $(\gamma_0, \varkappa_0)$ eineindeutige Abbildung dieser Umgebung auf einen Bereich der $\gamma, \varkappa$-Ebene, der den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $\gamma_0, \varkappa_0$ in seinem Innern enthält, und dem Parallelogramm mit den vier genannten Eckpunkten entspricht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2d\gamma$ und $2d\varkappa$, dessen Inhalt also $4d\gamma \cdot d\varkappa$ ist. Ist ds_1 der Abstand des Punktes $(\gamma_0, \varkappa_0)$ von der Kurve $\gamma = \gamma_0 + d\gamma$ und ds_2 der von der Kurve $\varkappa = \varkappa_0 + d\varkappa$, ferner φ der Winkel zwischen den Kurven $\gamma = \gamma_0$ und $\varkappa = \varkappa_0$ im Punkte $(\gamma_0, \varkappa_0)$, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung $\frac{4ds_1 \cdot ds_2}{\sin \varphi}$ der Inhalt des oben beschriebenen Parallelogramms. Eine eineindeutige Beziehung zwischen den Flächen dieser Parallelogramme wird nur dann bestehen, wenn ihre Inhalte von derselben Grössenordnung, also ihr Verhältnis

$$\frac{d\gamma}{ds_1} \cdot \frac{d\varkappa}{ds_2} \cdot \sin \varphi$$

endlich und von Null verschieden ist. In diesem Falle wird man

die Stelle $(\gamma_0, \varkappa_0)$ als regulär bezeichnen können; hingegen soll sie singulär heissen, wenn der genannte Ausdruck verschwindet oder unendlich wird. Nun ist $\frac{d\gamma}{ds_1}$ die Zunahme des Parameters γ pro Einheit der Bogenlänge senkrecht zur Kurve $\gamma = \gamma_0$; $\frac{d\varkappa}{ds_2}$ die Zunahme des Parameters $\varkappa$ pro Einheit der Bogenlänge senkrecht zur Kurve $\varkappa = \varkappa_0$. Man bezeichnet[1]) mit dem Gradient von γ den Vektor, der in der Tangentialebene der Fläche in einem Punkte $(\gamma, \varkappa)$ liegt, in der Richtung der zunehmenden Werte von γ auf der Tangente der Kurve $\gamma = \gamma_0$ im Punkte $(\gamma_0, \varkappa_0)$ senkrecht steht, und dessen Betrag

$$|\operatorname{grad} \gamma| = \frac{d\gamma}{ds_1}$$

ist. Analog bestimmt sich der Gradient von $\varkappa$. Dann hat das Verhältnis der beiden Flächeninhalte $\frac{d\gamma}{ds_1} \cdot \frac{d\gamma}{ds_2} \sin\varphi$ die Bedeutung des äusseren Produktes der beiden Vektoren, da ja φ als Winkel zwischen den Kurven $\gamma = \gamma_0$ und $\varkappa = \varkappa_0$ auch der zwischen den beiden Gradienten von γ und $\varkappa$ ist. Dieses äussere Produkt hat einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Wert, wenn die beiden Gradienten eindeutig existieren, ihr Betrag endlich und von Null verschieden ist, und der Winkel, den sie miteinander bilden, weder 0 noch π ist. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so heisst die Stelle singulär. Damit ist die Frage der Regularität des Parameternetzes auf die Existenz, den Wert und die gegenseitige Orientierung der Gradienten zurückgeführt.

Hierfür sind aber analytische Kriterien leicht zu bestimmen. Aus der Definition des Gradienten von γ folgt, dass er senkrecht steht auf der Tangente und der Flächennormalen im Punkt $\gamma = \gamma_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ der Kurve $\gamma = \gamma_0$. Sind allgemein

$$\begin{aligned} \xi &= f(\gamma, \varkappa) \\ \eta &= g(\gamma, \varkappa) \\ \zeta &= h(\gamma, \varkappa) \end{aligned}$$

[1]) Der „Gradient" ist in dieser Weise für ebene Parameternetze von Herrn Professor Runge eingeführt worden (Ausarbeitung der Vorlesung über graphische Methoden 1907. Math. Lesezimmer, Göttingen). Dort ist auch als Kriterium der Singularität das Verschwinden des äusseren Produktes abgeleitet.

die Beziehungen, die die rechtwinkeligen Raumkoordinaten eines Flächenpunktes mit seinen Parameterwerten verknüpfen, bedeutet ferner der an das Funktionszeichen angehängte Index $\varkappa$ eine Differentiation nach $\varkappa$ und bedeuten ähnlich wie oben X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale im Punkte $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, so sind die Richtungskosinus A_γ, B_γ und Γ_γ des Gradienten von γ:

$$A_\gamma = \frac{g_\varkappa Z - h_\varkappa Y}{\sqrt{S(g_\varkappa Z - h_\varkappa Y)^2}}$$

$$B_\gamma = \frac{h_\varkappa X - f_\varkappa Z}{\sqrt{S(g_\varkappa Z - h_\varkappa Y)^2}}$$

$$\Gamma_\gamma = \frac{f_\varkappa Y - g_\varkappa X}{\sqrt{S(g_\varkappa Z - h_\varkappa Y)^2}},$$

wo S die Summe über den dahinterstehenden Ausdruck und die daraus durch zyklische Vertauschung von f, g, h; X, Y, Z entstehenden andeutet. Analog definieren sich die Richtungskosinus des Gradienten von $\varkappa$.

Schneidet die Normalebene zur Kurve $\gamma = \gamma_0$ im Punkte $\gamma = \gamma_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ die Kurve $\gamma = \gamma_0 + d\gamma$ im Punkte $\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + d\bar{\eta}$, $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + d\bar{\zeta}$, so müssen die Koordinaten dieses Schnittpunktes der Gleichung der Normalebene

$$f_\varkappa (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0) + g_\varkappa (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0) + h_\varkappa (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0) = 0$$

genügen. Für den Punkt $\bar{\xi}\,\bar{\eta}\,\bar{\zeta}$ besteht demnach zwischen den Parameterinkrementen die Beziehung

$$d\varkappa = -\frac{S f_\varkappa \cdot f_\gamma}{S f_\varkappa^2} d\gamma .$$

Man kann hierdurch $d\bar{\xi}$, $d\bar{\eta}$ und $d\bar{\zeta}$ durch $d\gamma$ allein ausdrücken, und es berechnet sich aus den Beziehungen:

$$\bar{\xi} - \bar{\xi}_0 = A_\gamma \, ds_1$$
$$\bar{\eta} - \bar{\eta}_0 = B_\gamma \, ds_1$$
$$\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0 = \Gamma_\gamma \, ds_1$$

der Betrag

$$|\operatorname{grad} \gamma| = \frac{d\gamma}{ds_1} = \frac{S f_\varkappa^2}{\sqrt{S(g_\varkappa Z - h_\varkappa Y)^2}}.$$

Schliesslich berechnet sich die dritte kritische Grösse zu

$$\cos \varphi = \frac{S f_\varkappa f_\gamma}{S f_\varkappa^2 \cdot S f_\gamma^2}$$

Wendet man diese Formeln auf den Fall der Zentrafläche des Paraboloides an, so treten für f, g und h die in 4) definierten Funktionen ein. Es ergeben sich daraus für die Richtungskosinus und den Betrag des Gradienten von γ die Werte

$$A_\gamma = \sqrt{\frac{(a-\gamma)(b-\gamma)}{\gamma(\gamma-\varkappa)}}$$

$$B_\gamma = \pm\sqrt{-\frac{a(a-\varkappa)(b-\gamma)}{(a-b)\gamma(\gamma-\varkappa)}}$$

$$\Gamma_\gamma = \pm\sqrt{\frac{b(b-\varkappa)(a-\gamma)}{(a-b)\gamma(\gamma-\varkappa)}}$$

$$|\operatorname{grad}\gamma| = 4\sqrt{-\frac{(a-\gamma)(b-\gamma)\gamma}{(\varkappa-\gamma)^3}}$$

Hierbei gehört zu jedem der durch ein Wertepaar γ, $\varkappa$ definierten Punkte (im allgemeinen vier) eine bestimmte der vier möglichen Vorzeichenkombinationen. Diese Formeln zeigen uns in der Tat, dass die Werte $\gamma = a$ und $\gamma = b$ singuläre Werte sind, dass die Kurven $\gamma = a$ und $\gamma = b$ singuläre Kurven des Parameternetzes sind. Denn für $\gamma = a$ werden A_γ und Γ_γ gleich Null, B_γ wird ± 1, und zwar gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem man von einem Punkt mit positivem oder negativem η zur Ebene $\eta = 0$ übergeht. Die Richtung des Gradienten ist normal zur Ebene $\eta = 0$, aber nicht eindeutig definiert, es sind beide Möglichkeiten zulässig. Gleichzeitig verschwindet $|\operatorname{grad}\gamma|$. Die Kurven $\gamma = a$ und $\gamma = b$ sind singulär in dem auf Seite 19 ff. festgelegten Sinne. Da a und b Grenzen für die zu einem Mantel gehörenden Variabilitätsbereiche sind, gibt es in der Nachbarschaft eines Punktes $\gamma = a$, $\varkappa = \varkappa_0$ ($\varkappa_0 \neq a$) oder $\gamma = b$, $\varkappa = \varkappa_0$ nicht gleichzeitig Punkte mit den Parameterwerten $\gamma = a + d\gamma$ bezw. $\gamma = b + d\gamma$ und solche mit den Parameterwerten $\gamma = a - d\gamma$ bezw. $\gamma = b - d\gamma$. Für ein von Kurven $\gamma =$ konst., $\varkappa =$ konst. gebildetes sehr kleines Parallelogramm mit den Punkte $\gamma = a$, $\varkappa = \varkappa_0$ (z. B. des ersten Mantels) als Mittelpunkt sind zwei Seiten Elemente der Kurven $\varkappa = \varkappa_0 \pm d\varkappa$, die beiden anderen aber symmetrische Elemente derselben Parameterkurve $\gamma = a - d\gamma$. Dieses Parallelogramm wird durch die Abbildung auf die $\gamma, \varkappa$-Ebene auf das doppelt überdeckt zu denkende Rechteck mit Elementen der vier Kurven $\gamma = a$, $\gamma = a - d\gamma$, $\varkappa = \varkappa_0 + d\varkappa$ und

$\varkappa = \varkappa_0 - d\varkappa$ als Seiten, also auf dieses Rechteck einzweideutig abgebildet. Dieselbe Eigenschaft hat die Abbildung in der Umgebung eines Punktes $\gamma = a$, $\varkappa = \varkappa_0$ auf dem zweiten Mantel, oder in der Nähe eines Punktes $\gamma = b$, $\varkappa = \varkappa_0$.

Es liefert nichts Neues für die Kenntnis der Fläche, wenn man das Verhalten des äusseren Produktes der Gradienten von γ und $\varkappa$ erschöpfend untersucht. Es zeigt sich, dass dieses überall ausser in den Punkten der Symmetrieebenen, deren Singularität für die Fläche ($\varkappa = a$ oder $\varkappa = b$) oder für das Parameternetz ($\gamma = a$ oder $\gamma = b$) schon untersucht ist, endlich und von Null verschieden ist.

---

§ 5. Die Gestalt der Parameterkurven und der einzelnen Mäntel.

Ergänzen wir nunmehr unsere Betrachtungen dadurch, dass wir die Gestalt der Parameterkurven allgemein untersuchen, so gelingt es leicht, eine Vorstellung von den gestaltlichen Verhältnissen der beiden Mäntel zu bekommen. (Vergl. Modell I und Modell II). Die Parameterkurven studieren wir in der Weise, dass wir sie auf die Symmetrieebenen senkrecht projizieren und die Projektionen diskutieren. Von diesen schliessen wir wieder auf die Kurven selbst. Der Kürze halber bezeichnen wir die Projektion auf die Ebene $\eta_1 = 0$ als Aufriss, die auf die Ebene $\mathfrak{Z} = 0$ als Grundriss. Der Grundriss der Kurve $\gamma = \gamma_0$ ist dann nach 4) gegeben durch

9a)
$$\xi = \xi_1 + \frac{3}{4}(a - \varkappa)$$
$$\eta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{(a-\varkappa)^3 (a - \gamma_0)}{a(a-b)}},$$

wo
$$\xi_1 = -\frac{3}{8}(a-b) - \frac{\gamma_0}{4}$$

ist. Er ist also eine Neilsche Parabel mit der Spitze bei $\xi = \xi_1$. Der Aufriss der Kurve $\gamma = \gamma_0$ ist

$$\xi = \xi_2 + \frac{3}{4}(b - \varkappa)$$

9b)

$$\eta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\varkappa)^3(b-\gamma_0)}{b(b-a)}}$$

mit $$\xi_2 = \frac{3}{8}(a-b) - \frac{\gamma_0}{4},$$

ist also auch eine Neilsche Parabel, deren Rückkehrpunkt bei $\xi = \xi_2$ liegt. Man kann somit eine geodätische Kurve als Schnitt zweier Zylinder dritter Ordnung auffassen, deren Erzeugende über diesen beiden Neilschen Parabeln auf den Ebenen $\eta = 0$ bezw. $\zeta = 0$ senkrecht stehen, und es ergibt sich, dass die Kurven $\gamma =$ konst. Raumkurven 9. Ordnung sind.

Der Grundriss einer Kurve $\varkappa = \varkappa_0$ ergibt sich nach 4) als

$$\xi = \xi_1^* + \frac{1}{4}(a - \gamma)$$

10a)

$$\eta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\varkappa_0)^3(a-\gamma)}{a(a-b)}},$$

wo $$\xi_1^* = \frac{1}{8}(a + 3b) - \frac{3}{4}\varkappa_0$$

ist, ist also eine gewöhnliche Parabel mit der ξ-Achse als Symmetrieachse, deren Scheitel bei $\xi = \xi_1^*$ liegt. Für die Punkte des Aufrisses ist

$$\xi = \xi_2^* + \frac{1}{4}(b - \gamma)$$

10b)

$$\eta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\varkappa_0)^3(b-\gamma)}{b(b-a)}}$$

mit $$\xi_2^* = \frac{3}{8}a + \frac{1}{8}b - \frac{3}{4}\varkappa_0.$$

Der Aufriss ist auch eine gewöhnliche Parabel mit der ξ-Achse als Symmetrieachse und dem Scheitel bei $\xi = \xi_2^*$. Die konjugierten Kurven sind Raumkurven 4. Ordnung.

Für die geodätischen Kurven des ersten Mantels ist nach dem ersten Satze

$$b \leqq \gamma_0 \leqq a,$$

und es liegt demnach der freie Parameter $\varkappa$ zwischen den Grenzen

$$a \leqq \varkappa \leqq \infty.$$

Somit ergibt sich aus den ersten Gleichungen 9a) und 9b), dass die beiden Neilschen Parabeln sich von $\xi = \xi_1$ bezw. $\xi = \xi_2$ nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche ziehen. Da $\varkappa$ auf die Werte $\varkappa \geqq a$ beschränkt ist, kann der Wert $\xi = \xi_2$, der $\varkappa = b$ entspricht, nicht erreicht werden; die durch 9b) dargestellte Neilsche Parabel ist also nicht in ihrer ganzen Ausdehnung Aufriss der Kurve $\gamma = \gamma_0$, sondern nur der den Rückkehrpunkt nicht enthaltende Teil (Fig. 7), für den $\xi < \xi_2 - \frac{3}{4}(a - b) = \xi_1$. Hieraus und aus Fig. 7 folgt dann

Satz 7. *Die Parameterkurven $\gamma = \gamma_0$ des ersten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene $\zeta = 0$ symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder auf der Rückkehrkante $\varkappa = a$ in der Ebene $\eta = 0$ einen Rückkehrpunkt hat und sich von diesem in zwei zur Ebene $\eta = 0$ symmetrischen Bögen nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche erstreckt.*

Bisher war stillschweigend γ_0 von a und b verschieden angenommen. Geht γ_0 in den Wert a über, so rücken die beiden Rückkehrpunkte der Kurve $\gamma = \gamma_0$ auf der Kurve $\varkappa = a$ in die Punkte C_1 bezw. C_2. Jeder der beiden Äste entartet dadurch, dass die beiden symmetrischen Bögen zusammenfallen, in ein ebenes Kurvenstück, nämlich je in einen der sich von C_1 und C_2 ins Unendliche erstreckenden Bögen der Kurve 7). Geht andererseits γ_0 in den Wert b über, so rücken die beiden Rückkehrpunkte in den Scheitel S_1 der Rückkehrkante $\varkappa = a$ zusammen, die beiden Äste fallen zusammen in die Kurve 5) der Ebene $\zeta = 0$ (Fig. 9).

Betrachten wir nun ebenso die konjugierten Kurven des ersten Mantels, so ist der freie Parameter in den Gleichungen 10) auf den Bereich

$$a \leqq \gamma \leqq b$$

beschränkt. Da den Grenzwerten a und b die Werte ξ_1^* bezw. ξ_2^* entsprechen, kommen von den Grundrissparabeln nur endliche, die Scheitel enthaltende Segmente in Frage. Im Grundriss entspricht der Scheitel dem Werte $\gamma = a$. Für $\gamma = b$ wird $\xi = \xi_2^* > \xi_1^*$, die Parabel im Grundriss ist also nach der Seite der zunehmenden Abszissen geöffnet (Fig. 8). Umgekehrt liefert im Aufriss $\gamma = b$ den Scheitel $\xi = \xi_1^*$. Für $\gamma = a$ wird $\xi = \xi_1^* < \xi_2^*$, sodass die Parabel nach der Seite der abnehmenden Abszissen geöffnet ist. Jedem Scheitel in der Projektion

entsprechen aus Symmetrie zwei Scheitel der Raumkurve, sodass sich ergibt:

Satz 8. *Die Parameterkurven* $\varkappa = \varkappa_0$ *des ersten Mantels sind geschlossene Ovale mit je zwei Scheiteln in den Symmetrieebenen* $\eta = 0$ *und* $\mathfrak{z} = 0$ *auf den Kurven* $\gamma = a$ *bezw.* $\gamma = b$.

Besondere Gestalt haben wieder die Kurven $\varkappa_0 = a$ (Fig. 9). Wird $\varkappa_0 = a$, so rücken die beiden Scheitel auf der Kurve $\gamma = a$ immer näher an die Punkte C_1 und C_2, die Scheitel auf der Kurve $\gamma = b$ rücken in den Punkt S_1 zusammen. Je weniger sich $\varkappa_0$ von a unterscheidet, um so enger umschliesst die Kurve $\varkappa_0$ das Segment $C_1 S_1 C_2$ der Kurve 8) und geht schliesslich, in eine ebene Kurve entartend, für $\varkappa_0 = a$ in dieses Segment über.

Behandelt man in analoger Weise die Parameterkurven des zweiten Mantels (Fig. 10, 11) (Modell II), so gewinnt man die Sätze:

Satz 9. *Die geodätischen Kurven des zweiten Mantels sind geschlossene Raumkurven mit vier Rückkehrpunkten, von denen je zwei auf der Kurve* $\varkappa = a$ *und auf der Kurve* $\varkappa = b$ *liegen.*

Satz 10. *Die konjugierten Kurven des zweiten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene* $\xi = 0$ *symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder sich in zwei zur Ebene* $\eta = 0$ *symmetrischen Bögen von dem in der Symmetrieebene* $\eta = 0$ *auf der Kurve* $\gamma = a$ *liegenden Scheitel nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche zieht.*

Entartungen treten wieder für die Parameterwerte $\gamma_0 = a$ und $\varkappa_0 = a$ oder b ein. Nähert sich γ_0 dem Werte a, so rücken die Rückkehrpunkte auf der Kurve $\varkappa = a$ auf den Punkt C_1 bezw. C_2 zu, die der Ebene $\xi = 0$ rücken in den Punkt S_2 zusammen, so dass für Werte von γ_0, die von a sehr wenig verschieden sind, die geodätischen Kurven γ_0 das Segment $C_1 S_2 C_2$ der Kurve 7) sehr dicht umschliessen und schliesslich für $\gamma_0 = a$ in dieses Segment übergehen, dadurch, dass die zur Ebene $\eta = 0$ symmetrischen Bogen in diese zusammenklappen. Nähert sich $\varkappa_0$ dem Werte a, so umschliesst jeder Zweig der Kurve $\varkappa_0$ den Punkt C_1 bezw. C_2 und den von diesem sich ins Unendliche erstreckenden Bogen der Parabel 8) enger und enger, bis schliesslich für $\varkappa_0 = a$ die Scheitel in C_1 bezw. C_2 und jeder Ast in die

genannten ebenen Bögen zusammenfallen. Nähert sich $\varkappa_0$ dem Werte b, so rücken die beiden Äste von beiden Seiten dicht an die Parabel 6) heran und fallen schliesslich für $\varkappa_0 = b$ mit dieser zusammen (Fig. 12).

---

§ 6. Singularitäten der Fläche.

II. Die Doppelkurve.

Wir hatten in § 3 einen Flächenpunkt als singulär bezeichnet, wenn in ihm die Flächennormale nicht auf eindeutige Weise definiert ist, und daran anschliessend untersucht, wann die Formeln für die Richtungskosinus der Normalen für ein Wertepaar γ, $\varkappa$ mehrdeutig werden. Damit ist aber die Frage nach den Singularitäten noch nicht restlos beantwortet. Es kann vielmehr von einander verschiedene Wertepaare γ, $\varkappa$ geben, für die $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ nach den Formeln 4) die gleichen Werte annehmen, ohne dass gleichzeitig die Grössen X, Y, Z die gleichen werden. Die Beziehungen

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(\gamma_1, \varkappa_1) &= \bar{\xi}(\gamma_2, \varkappa_2)\\ \bar{\eta}(\gamma_1, \varkappa_1) &= \bar{\eta}(\gamma_2, \varkappa_2)\\ \bar{\zeta}(\gamma_1, \varkappa_1) &= \bar{\zeta}(\gamma_2, \varkappa_2)\end{aligned}$$

ergeben für die vier Grössen γ_1, $\varkappa_1$, γ_2, $\varkappa_2$ drei Bedingungen. Es gibt also eine einfache Mannigfaltigkeit von Wertequadrupeln $\gamma_1, \varkappa_1, \gamma_2, \varkappa_2$, die die Gleichungen 9) erfüllen, d. h. die Fläche besitzt eine Doppelkurve. Es gilt nun festzustellen, ob diese, oder wenigstens Teile von ihr, reell sind. Man kann nach den Gleichungen 4) die obigen Gleichungen auf die Form

$$\begin{aligned}&\text{a)} \quad \gamma_1 - \gamma_2 + 3(\varkappa_1 - \varkappa_2) = 0\\ 10\quad &\text{b)} \quad (a-\varkappa_1)^3\gamma_1 - (a-\varkappa_2)^3\gamma_2 - a\left[(a-\varkappa_1)^3 - (a-\varkappa_2)^3\right] = 0\\ &\text{c)} \quad (b-\varkappa_1)^3\gamma_1 - (b-\varkappa_2)^3\gamma_2 - b\left[(b-\varkappa_1)^3 - (b-\varkappa_2)^3\right] = 0\end{aligned}$$

bringen. Aus den Gleichungen 10) lassen sich nun γ_1 und γ_2 leicht eliminieren. Man erhält dann zwischen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Beziehung:

$$0 = (a-b)(\varkappa_1-\varkappa_2)^4\left[\varkappa_1^2 + 4\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 - 3(a+b)(\varkappa_1+\varkappa_2) + 6ab\right]$$

Da $(a-b)$ von Null verschieden ist, wird diese erfüllt, entweder, wenn $\varkappa_1 = \varkappa_2$ ist, oder wenn

11) $$\varkappa_1^2 + 4\,\varkappa_1\,\varkappa_2 + \varkappa_2^2 - 3\,(a+b)(\varkappa_1+\varkappa_2) + 6\,a\,b = 0$$

ist. Der erste Fall ist trivial: Ist $\varkappa_1 = \varkappa_2$, so ist nach 10) auch $\gamma_1 = \gamma_2$. Bleibt also die Beziehung 11). Addiert man zu 10 b) und c) bezw. die mit a^3 oder b^3 multiplizierte Gleichung 10 a), so erhält man unter Benutzung von 11) zwei Gleichungen, aus denen sich γ_1 und γ_2 in folgender Weise bestimmen:

$$\gamma_1 = \frac{3\,a\,b\,(2\,\varkappa_2 - \varkappa_1) - 3\,\varkappa_2^3}{3\,a\,b - \varkappa_1^2 - \varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_2^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{3\,a\,b\,(2\,\varkappa_1 - \varkappa_2) - 3\,\varkappa_1^3}{3\,a\,b - \varkappa_1^2 - \varkappa_1\varkappa_2 - \varkappa_2^2},$$

Soll die Doppelkurve reell sein, so muss es Werte $\varkappa_1 \geqq b$ geben, für die sich nach Gleichung 11) ein Wert $\varkappa_2 \geqq b$ ergibt, und gleichzeitig müssen die Gleichungen 12) zu diesen beiden Werten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Werte γ_1 und $\gamma_2 > b$ liefern, so dass weder γ_1 und $\varkappa_1$ noch γ_2 und $\varkappa_2$ demselben Bereiche b_i angehören.

Diese Diskussion gestaltet sich am einfachsten, wenn man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ als rechtwinkelige Koordinaten deutet. Durch die Koordinatentransformation

$$\varkappa_1' = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\sqrt{2}}$$

$$\varkappa_2' = \frac{-\varkappa_1 + \varkappa_2}{\sqrt{2}},$$

also eine Drehung des Koordinatensystems um 45^0, nimmt 11) die Form

$$\frac{2\left(\varkappa_1' - \frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2}{(a-b)^2} - \frac{2\,\varkappa_2'^2}{3\,(a-b)^2} - 1 = 0$$

an. Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Scheitel A und B bei $\varkappa_1' = a\sqrt{2}$, $\varkappa_2' = 0$ bezw. $\varkappa_1' = b\sqrt{2}$, $\varkappa_2' = 0$ liegen. Die Länge der reellen Achse ist $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, und die Asymptoten bilden mit der reellen Achse einen Winkel von 60^0 (Fig. 13).

In der $\varkappa_1, \varkappa_2$-Ebene ist also die reelle Achse der Hyperbel die Gerade $\varkappa_1 = \varkappa_2$; der Mittelpunkt ist der Punkt $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{1}{2}(a+b)$; die Scheitel haben die Koordinaten A: $\varkappa_1 = \varkappa_2 = a$, B: $\varkappa_1 = \varkappa_2 = b$. Diese Hyperbel ist eine Veranschaulichung der Zuordnung der Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, die den Punkten der Doppelkurve entsprechen.

Für reelle Punkte der Doppelkurve scheidet in der x_1, x_2-Ebene ohne weiteres der Raum aus, wo $x_1 < b$ oder $x_2 < b$ ist. Der zu untersuchende Raum kann aber noch weiter eingeschränkt werden. Da die Figur zur Geraden $x_1 = x_2$ symmetrisch ist, liegt der Punkt $x_1 = \overline{\overline{x}}$, $x_2 = \overline{x}$ auf der Hyperbel, wenn der Punkt $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = \overline{\overline{x}}$ auf der Hyperbel liegt. Entsprechen den Werten $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = \overline{\overline{x}}$ nach 12) die Werte $\gamma_1 = \overline{\gamma}$, $\gamma_2 = \overline{\overline{\gamma}}$, so entsprechen den Werten $x_1 = \overline{\overline{x}}$, $x_2 = \overline{x}$ die Werte $\gamma_1 = \overline{\gamma}$ und $\gamma_2 = \overline{\gamma}$. Beim Übergang zu dem symmetrischen Punkt der Hyperbel gehen nur x_1 in x_2, γ_1 in γ_2 und umgekehrt x_2 in x_1 und γ_2 in γ_1 über. Wir können also den Teil der $x_1 x_2$-Ebene, wo $x_2 > x_1$ ist, von der Betrachtung ausscheiden, und es fragt sich: Liegen Punkte der Hyperbel in dem Raume $x_2 \geqq b$, $x_2 \leqq x_1$. In der Halbebene $x_2 \leqq x_1$ liegen zwei Halbäste der Hyperbel. Für den einen ist $x_2 \leqq b$; von ihm kommt höchstens der Scheitel $x_1 = x_2 = b$ in Frage. Die zugehörenden Werte von γ sind nach 12) $\gamma_1 = \gamma_2 = b$. Da x_1 und γ_1 und ebenso x_2 und γ_2 demselben Bereich b_2 angehören, entspricht diesen Werten kein reeller Punkt der Fläche. Für den anderen Halbast der Hyperbel ist $x_1 \geqq a$. Die Gerade $x_1 = x_2$ hat mit ihm den Scheitel $x_1 = x_2 = a$ gemein, dem nach 12) die Werte $\gamma_1 = \gamma_2 = a$ entsprechen. Der Scheitel A der Hyperbel liefert also die beiden Mänteln gemeinsamen Punkte C_1 und C_2. Die andere Begrenzung des in Frage kommenden Bereiches, die Gerade $x_2 = b$ schneidet den Halbast $x_1 \geqq a$ in dem Punkte D, für den

$$x_1 = 3a - 2b \; (> a)$$

ist. Nach 12) sind die zugehörenden Werte

$$\gamma_2 = 9a - 8b > a$$
$$\gamma_1 = b.$$

Diesen Werten entsprechen die Seite 11 erwähnten Schnittpunkte der Kurven 5) und 6) in der Ebene $\zeta = 0$:

$$\overline{\xi} = -\tfrac{1}{8}(15a - 13b)$$
$$\overline{\eta} = \pm \sqrt{\frac{2\,(a-b)^3}{a}}$$
$$\overline{\zeta} = 0.$$

In dem in Frage kommenden Bereich liegt also das Segment AD der Hyperbel, dessen Endpunkte den reellen gemein-

samen Punkten der Hauptschnitte in den Ebenen $\eta = 0$ bezw. $\mathfrak{z} = 0$ der beiden Mäntel entsprechen. Durchläuft ein Punkt das Segment A D, so durchläuft

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &\text{ die Werte } a \text{ bis } 3a - 2b > a \\ \gamma_1 &\text{ „ } \quad \text{ „ } \quad a \text{ „ } b \\ \varkappa_2 &\text{ „ } \quad \text{ „ } \quad a \text{ „ } b \\ \gamma_2 &\text{ „ } \quad \text{ „ } \quad a \text{ „ } 9a - 8b > a, \end{aligned}$$

$\gamma_1, \varkappa_1$ legen also Punkte des ersten Mantels, $\gamma_2, \varkappa_2$ solche des zweiten Mantels fest, der Bogen A D der Hyperbel repräsentiert die Durchdringungskurve der beiden Mäntel. Es gilt somit:

Satz 11. *Die Zentrafläche des elliptischen Paraboloides besitzt eine reelle Doppelkurve, in der sich die beiden Mäntel der Fläche durchdringen. Sie verläuft in jedem der Quadranten, in die die Symmetrieebenen die Fläche teilen, von einem Schnittpunkt der Kurven* $\varkappa = b$ *und* $\gamma = b$ *nach einem der Punkte* C_1 *bezw.* C_2 [1]).

Ein singuläres Verhalten zeigt die Doppelkurve auf der Fläche nur in den Punkten, die sie mit den in § 2 und § 3 diskutierten singulären Kurven der Fläche gemein hat, also in ihren Schnittpunkten mit den Symmetrieebenen. Für die beiden in der Ebene $\mathfrak{z} = 0$ gelegenen Punkte P und P′ ist $\varkappa_1 = 3a - 2b$, $\gamma_1 = b$, $\varkappa_2 = b$, $\gamma_2 = 9a - 8b$. Wir wollen den Punkt, für den $\eta > 0$ ist, ins Auge fassen. Zu einem benachbarten Punkt der Doppelkurve gehört ein Wert $\varkappa_2 = b + \varepsilon$, wo ε eine kleine positive Grösse ist. Nach Gleichung 11) bestimmt sich für diesen Punkt

$$\varkappa_1 = 3a - 2b - 3\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{3(a-b)} + \cdots$$

und, wenn man diese Werte von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in die erste Gleichung 12) einsetzt, so findet man

$$\gamma_2 = 9a - 8b - 12\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{a-b} + \cdots$$

Für $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mathfrak{z}}$ ergibt sich dann nach 4):

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(15a - 13a) + \frac{9\varepsilon}{4} + \cdots$$

---

[1]) Caspary zeigt a. a. O. S. 185, 186, dass die Doppelkurve 12. Ordnung, 6. Klasse und vom Geschlecht 0 ist.

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{2(a-b)^3}{a}}\left(1 - \frac{9\varepsilon}{4(a-b)} + \cdots\right)$$

$$\bar{\zeta} = \pm\frac{3}{2\sqrt{b}}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \cdots\right).$$

Mithin folgt:

Satz 12. *Die Punkte, die die Doppelkurve mit der Symmetrieebene $\zeta = 0$ gemein hat, sind Rückkehrpunkte der Kurve.*

Wir betrachten nunmehr die Punkte C_1 und C_2, und zwar wollen wir C_1 unseren Ausführungen zu Grunde legen. Einem zu C_1 benachbarten Punkt $\bar{C}_1$, er möge im Halbraum $\eta < 0$ liegen, möge der Wert $\varkappa_2 = a - \varepsilon$ zukommen, wo ε eine kleine positive Grösse ist. Nach 11) wird

$$\varkappa_1 = a + \varepsilon - \frac{2\varepsilon^2}{3(a-b)} + \cdots$$

und nach 12)

$$\gamma_2 = a + 3\varepsilon + \frac{4\varepsilon^2}{a-b} + \cdots .$$

Für diese Werte γ_2 und $\varkappa_2$ wird nach den Gleichungen 4)

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8}(5a - 3b) - \frac{\varepsilon^2}{a-b} + \cdots$$

$$\bar{\eta} = \varepsilon^2\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a(a-b)}} + \cdots$$

$$\bar{\zeta} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-b)^3}{b}}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(a-b)^2} + \cdots\right).$$

Die Komponenten des Linienelementes $C_1\,\bar{C}_1$

$$\delta\bar{\xi} = -\frac{\varepsilon^2}{(a-b)} + \cdots$$

$$\delta\bar{\eta} = \frac{\varepsilon^2\sqrt{3}}{2\sqrt{a(a-b)}} + \cdots$$

$$\delta\bar{\zeta} = -\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{b(a-b)}} + \cdots$$

sind von derselben Grössenordnung in ε, d. h. das Linienelement bildet einen von Null und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel mit der Symmetrieebene $\eta = 0$. Beim Übergang von $\bar{C}_1$ zu dem zu $\bar{C}_1$ symmetrischen Punkt $\bar{C}_1'$ ändert nur η sein Zeichen, sodass die symmetrischen Linienelemente $C_1\,\bar{C}_1$ und $C_1'\,\bar{C}_1$ einen endlichen,

von 0 und π verschiedenen Winkel mit einander bilden, und die Doppelkurve in C_1 eine Ecke hat. Da sich $\varkappa_1$ und γ_2 und mithin auch $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, und $\bar{\zeta}$ aus $\varkappa_2$ nach 11), 12) und 4) nur durch algebraische Operationen ermitteln, ist die Doppelkurve sicher algebraisch. Für eine solche Kurve ist aber ein Punkt mit unstetig drehender Tangente ausgeschlossen. Es kann der Punkt C_1 nur ein Doppelpunkt für die Doppelkurve sein, über den hinaus sich die beiden Äste $C_2 PC_1$ und $C_2 P'C_1$ stetig fortsetzen, ev. ohne noch auf reellen Mänteln der Fläche zu liegen. Es gibt also ausser $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_1'$ (Fig. 14) noch zwei zu C_1 benachbarte Punkte $\bar{\bar{C}}_1$ und $\bar{\bar{C}}_1'$ der Kurve, so dass die Komponenten der Linienelemente $C_1 \bar{C}_1$ und $C_1 \bar{\bar{C}}_1'$ denen der Linienelemente $C_1 \bar{C}_1$ und $C_1 \bar{C}_1'$ bezw. entgegengesetzt gleich sind. Analytisch bedeutet diese Aussage: Es gibt ausser reellen positiven Grössen ε, die Punkte der beiden reellen Mäntel der Fläche liefern, noch andere Werte ε, für die $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ reell ausfallen und die Punkte der Doppelkurve liefern. Negative Werte von ε können nichts Neues liefern. Für $\varepsilon < 0$ liegt $\varkappa_2$ in b_3, $\varkappa_1$ und γ_2 nehmen dann nach 11) und 12) Werte von b_2 an. Das führt also nur dazu, dass wir die Doppelkurve nicht auf dem zweiten, sondern auf dem ersten Mantel studieren. Nach den oben aufgestellten Näherungsformeln für $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ liefert ein negativer Wert von ε sogar in erster Annäherung dieselben Werte für die Koordinaten $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, da die niedrigste Potenz von ε die zweite ist. Es kommen also nur komplexe Werte von ε in Betracht, komplexe Werte für die Parameter, eine Möglichkeit, auf die bisher keine Rücksicht genommen war. Existiert nun ein komplexes Wertepaar

$$\varkappa_1 = \bar{\varkappa} + i\bar{\bar{\varkappa}}$$
$$\gamma_1 = \bar{\gamma} + i\bar{\bar{\gamma}},$$

für das nach den Gleichungen 4) $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ reell werden, so liefern auch die konjugiert komplexen Werte

$$\varkappa_1 = \bar{\varkappa} - i\bar{\bar{\varkappa}}$$
$$\gamma_1 = \bar{\gamma} - i\bar{\bar{\gamma}}$$

aus den Formeln 4) reelle Werte der Koordinaten. Jeder reelle Punkt des algebraischen Gebildes 4), der durch komplexe Werte der Parameter geliefert wird, ist also ein Punkt der Doppelkurve.

Wenn nun auch bisher γ und $\varkappa$ als reell angenommen waren, so verlieren die Betrachtungen dieses Paragraphen doch nicht

ihre Gültigkeit, wenn man auch komplexe Werte für γ und $\varkappa$ zulässt. Insbesondere müssen auch die komplexen Werte $\varkappa_1, \varkappa_2$ der Gleichung 11) genügen und die Grössen γ_1 und γ_2 nach 12) bestimmen, wenn ihnen Punkte der Doppelkurve entsprechen sollen. Es ist demnach nachzuprüfen:

1) Gibt es reelle Werte $\overline{\varkappa}$ und $\overline{\overline{\varkappa}}$, die als reeller und imaginärer Teil zwei konjugiert komplexe Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2$ bestimmen, welche der Relation 11) genügen (d. h. für die die Radikanten von 4) reell werden).

2) Fallen für diese Werte γ_1 und γ_2 nach 12) so aus, dass die Radikanten von 4) positiv werden, dass also

$$(a - \gamma_1)(a - \varkappa_1)^3 < 0$$
$$(b - \gamma_1)(b - \varkappa_1)^3 > 0$$

werden.

Zur Erledigung der ersten Frage setzen wir die komplexen Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in Gleichung 11) ein. Diese nimmt dann die Gestalt an:

$$3\overline{\varkappa}^2 - 3(a + b)\overline{\varkappa} + 3ab + \overline{\overline{\varkappa}}^2 = 0$$

oder

13) $$\overline{\overline{\varkappa}}^2 = -3(a - \overline{\varkappa})(b - \overline{\varkappa}).$$

Diese Relation bestimmt zu jedem Wert von $\overline{\varkappa}$ aus dem Bereich b_2 einen reellen Wert von $\overline{\overline{\varkappa}}$. Bestimmt man dann nach 12) γ_1 und γ_2, so findet man:

14)
$$(a - \gamma_1) = \frac{(a - \overline{\varkappa})[(a - \overline{\varkappa}) + 9(b - \overline{\varkappa})]}{(a - \overline{\varkappa}) + (b - \overline{\varkappa})} + 3i\overline{\overline{\varkappa}}$$
$$(b - \gamma_1) = \frac{(b - \overline{\varkappa})[(b - \overline{\varkappa}) + 9(a - \overline{\varkappa})]}{(a - \overline{\varkappa}) + (b - \overline{\varkappa})} + 3i\overline{\overline{\varkappa}}.$$

Die zweite Frage erledigt sich auf folgendem Wege: Für $(a - \varkappa_1)^3$ und $(b - \varkappa_1)^3$ ergeben sich die Werte:

$$(a - \varkappa_1)^3 = (a - \overline{\varkappa})\left((a - \overline{\varkappa}) + (b - \overline{\varkappa})\right)\left[\frac{(a - \overline{\varkappa})[(a - \overline{\varkappa}) + 9(b - \overline{\varkappa})]}{(a - \overline{\varkappa}) + (b - \varkappa)} - 3i\overline{\overline{\varkappa}}\right]$$
$$(b - \varkappa_1)^3 = (b - \overline{\varkappa})\left((a - \overline{\varkappa}) + (b - \overline{\varkappa})\right)\left[\frac{(b - \overline{\varkappa})[(b - \overline{\varkappa}) + 9(a - \overline{\varkappa})]}{(a - \overline{\varkappa}) + (b - \overline{\varkappa})} - 3i\overline{\overline{\varkappa}}\right]$$

Die eckigen Klammern sind aber nichts anders als die zu $(a - \gamma_1)$ bezw. $(b - \gamma_1)$ konjugiert komplexen Werte. Das Vorzeichen von $(a - \gamma_1)(a - \varkappa_1)^3$ ist also das von $(a - \overline{\varkappa}) \cdot (a - \overline{\varkappa} + b - \overline{\varkappa})$, das von $(b - \gamma_1)(b - \varkappa_1)^3$ ist das gleiche wie das von $(b - \overline{\varkappa}) \cdot (a - \overline{\varkappa} + b - \varkappa)$. Da $\overline{\varkappa}$ dem Bereiche b_2 angehört, werden

die Radikanten von $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ in 4) positiv, wenn

$$a - \bar{x} + b - \bar{x} \leqq 0,$$

also

$$\bar{x} \geqq \frac{a+b}{2},$$

ist. Genügt $\bar{x}$ der Bedingung:

$$a \geqq \bar{x} \geqq \frac{a+b}{2},$$

so bestimmen die Gleichungen 13) und 14) komplexe Werte von $\varkappa_1$, γ_1, zu denen reelle Werte von $\bar{\xi}$, η, $\bar{\zeta}$ gehören. Für $\bar{x} = a$ wird $\bar{x} = 0$, $\gamma_1 = a$. Die durch die komplexen Werte von $\varkappa_1$ und γ_1 bestimmten Kurvenstücke schliessen sich also in den Punkten C_1 und C_2 in der Tat an die Durchdringungskurve der beiden Mäntel an und setzen diese stetig fort. Sie erstreckt sich von diesen Punkten aus ins Unendliche, da für $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ sowohl $(a - \gamma_1)$ als auch $(b - \gamma_1)$ unendlich werden.

Es gelten somit:

Satz 13. *Die Punkte, die die Doppelkurve mit der Symmetrieebene* $\eta = 0$ *gemein hat, sind Doppelpunkte.*

Satz 14. *Die Durchdringungskurve der beiden Mäntel stellt nur zwei begrenzte Stücke der Doppelkurve der Fläche dar. Diese besitzt noch vier weitere reelle sich ins Unendliche erstreckende Bögen, die keinem der beiden reellen Mäntel angehören und sich an die beiden genannten Stücke in den Punkten* C_1 *und* C_2 *stetig anschliessen.*

Anmerkung: Es mag hier auf ein einfacheres Beispiel einer Fläche hingewiesen werden, bei der man Ähnliches vorfindet. Das Ballsche Cylindroid [1])

15) $$\eta^2(1+\zeta) = \xi^2(1-\zeta)$$

liegt zwischen zwei parallelen Ebenen

$$\zeta = \pm 1$$

und wird von jeder Ebene

$$\zeta = a, \quad |a| < 1$$

in zwei Geraden geschnitten, die sich auf der ζ-Achse schneiden und für $|a| = 1$ in eine Gerade zusammenfallen. Die ζ-Achse bildet also zwischen den Punkten $\zeta = +1$ und $\zeta = -1$ eine

[1]) Ball, Theory of Screws, Dublin, 1876.

Selbstdurchdringungskurve der Fläche. Aber auch die Werte $\xi = 0$, $\eta = 0$, $|\zeta| > 1$ genügen der Gleichung 15). Die ζ-Achse ist also in ihrer ganzen Ausdehnung zu dem durch die Gleichung 15) definierten Gebilde zu rechnen. Für $|\zeta| > 1$ sind ihre Punkte die reellen Schnittpunkte zweier konjugiert imaginären Geraden, in denen eine Ebene

$$\zeta = a, \quad |a| > 1,$$

die Fläche schneidet.

---

§ 7. Verhalten der Fläche im Unendlichen.

Für beide Parameter γ und $\varkappa$ sind, wenn auch nicht gleichzeitig, nach Satz 1 die Werte ∞ zulässig. Auf dem ersten Mantel kann $\varkappa$ über alle Grenzen wachsen. Nach 4) werden dann auch $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ unendlich. Um die Art des Unendlichwerdens zu untersuchen, führen wir statt $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ homogene Koordinaten ein, indem wir

$$\bar{\xi} = \frac{\xi'}{\tau'}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta'}{\tau'}$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta'}{\tau'}$$

setzen. Ersetzen wir ausserdem $\varkappa$ durch $\frac{1}{\varkappa'}$, so wird $\varkappa$ über alle Grenzen zunehmen, wenn $\varkappa'$ gegen 0 konvergiert. Nach 4) wird

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = \left(\frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}\gamma\right)\varkappa'^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\varkappa'^{\frac{1}{2}} : \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-a\varkappa')^3(a-\gamma)}{a(a-b)}}$$

$$: \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-b\varkappa')^3(\gamma-b)}{b(a-b)}} : \varkappa'^{\frac{3}{2}}.$$

Also wird für $\varkappa' = 0$

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = 0 : \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-\gamma}{a}} : \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma-b}{b}} : 0.$$

Dieses Gleichungssystem stellt die unendlich ferne Gerade der η, ζ-Ebene dar und zwar in ihrer ganzen Ausdehnung; denn das Verhältnis

$$\frac{\eta'}{\zeta'} = \pm \sqrt{\frac{(a-\gamma)\,b}{(\gamma-b)\,a}},$$

das für $\gamma = a$ verschwindet und für $\gamma = b$ unendlich wird, ist für jeden zulässigen Wert von γ reell und nimmt jeden reellen Wert an. Zu jedem γ gehören zwei entgegengesetzt gleiche Werte von $\frac{\eta'}{\zeta'}$. Jede Kurve $\gamma = \gamma_0$ hat also zwei unendlich ferne Punkte. In den einen $\frac{\eta'}{\zeta'} = \sqrt{\frac{b\,(a-\gamma)}{a\,(\gamma-b)}}$ laufen die beiden zu verschiedenen Ästen gehörenden Bogen hinein, für die $\frac{\eta}{\zeta} > 0$ ist; in dem andern hängen die beiden anderen Bögen, für die $\frac{\eta}{\zeta} < 0$ ist, zusammen. Die beiden Äste, die nach Satz 7 im endlichen euklidischen Raume getrennt sind und keinen Punkt gemein haben, gehen also in zwei Punkten der unendlich fernen Ebene ineinander über, und es gilt der

Satz 15. *Die geodätischen Kurven des ersten Mantels sind im projektiven Raum geschlossene Kurven.*

Um die Fläche in der Umgebung eines bestimmten Punktes der unendlich fernen Geraden der η, ζ-Ebene zu untersuchen — es möge der Punkt $\frac{\eta'}{\zeta'} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-\gamma_0)\,b}{(\gamma_0-b)\,a}}$ sein — führen wir anstelle von $\varkappa'$ einen neuen Parameter ein durch die Gleichung:

$$\varkappa'' = \varepsilon_\eta\, \varkappa'^{\frac{1}{2}},$$

wo ε_η das Vorzeichen von η ist. $\varkappa''$ bestimmt dann auf einer Kurve γ_0 die Umgebung des Punktes $\varkappa'' = 0$ eindeutig, und es wird:

$$\xi' : \eta' : \tau' = \left(-\frac{3}{4}\varkappa'' + \left(\frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}\gamma\right)\varkappa''^3\right)$$
$$: \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-\gamma}{a\,(a-b)}}\,(1-a\,\varkappa''^2)^{\frac{3}{2}} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma-b}{b\,(a-b)}}\,(1-b\varkappa''^2)^{\frac{3}{2}} : \varkappa''^3.$$

Durch die projektive Transformation

$$\begin{aligned} \xi' &= -\xi' + \zeta' + t' \\ \eta' &= \eta' \\ \zeta' &= -\zeta' \\ \tau' &= \xi' \end{aligned}$$

bezw.

$$\begin{aligned} \xi' &= \tau' \\ \eta' &= \eta' \\ \zeta' &= -\zeta' \\ t' &= \xi' + \zeta' + \tau', \end{aligned}$$

oder in rechtwinkeligen Koordinaten:

$$\mathfrak{x} = \frac{\xi'}{t'} = \frac{\tau'}{\tau' + \xi' + \zeta'}$$
$$\mathfrak{y} = \frac{\eta'}{t'} = \frac{\eta'}{\tau' + \xi' + \zeta'}$$
$$\mathfrak{z} = \frac{\zeta'}{t'} = \frac{-\zeta'}{\tau' + \xi' + \zeta'},$$

geht die Ebene $\xi = 0$ ($\xi' = 0$) in die Ebene $\mathfrak{x} - \mathfrak{z} = 1$, die Ebene $\eta = 0$ ($\eta' = 0$) in die Ebene $\mathfrak{y} = 0$, die Ebene $\zeta = 0$ ($\zeta' = 0$) in die Ebene $\mathfrak{z} = 0$ und die unendlich ferne Ebene ($\tau' = 0$) in die Ebene $\mathfrak{x} = 0$ über, also wird aus der unendlich fernen Geraden der η, ζ-Ebene die Gerade $\mathfrak{z} = -1$, $\mathfrak{x} = 0$. Die Koordinaten der projektiv transformierten Fläche ergeben sich zu

$$\mathfrak{x} = -2\varkappa''^3 \sqrt{\frac{b(a-b)}{\gamma - b}} + \cdots$$
$$\mathfrak{y} = \sqrt{\frac{b(a-\gamma)}{a(\gamma - b)}} \left(1 + \frac{3}{2}\varkappa'' \sqrt{\frac{b(a-b)}{\gamma - b}} + \cdots\right)$$
$$\mathfrak{z} = -1 - \frac{3}{2}\varkappa'' \sqrt{\frac{b(a-b)}{\gamma - b}} + \cdots;$$

wenn man $\sqrt{\frac{b(a-\gamma)}{a(\gamma - b)}} = \mathfrak{y}_0$ setzt, so folgt aus diesen Formeln, dass $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z} + 1$ mit $\varkappa''$ ihr Zeichen ändern, dass also die Kurven $\gamma = \gamma_0$ und damit die Fläche selbst die Ebene $\mathfrak{x} = 0$ durchdringen. Dabei verschwindet $\mathfrak{x}$ von höherer Ordnung als $\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{z} + 1$. Die Kurve $\gamma = \gamma_0$ berührt also die Ebene $\mathfrak{x} = 0$. Berechnet man nach den allgemeinen Formeln die Richtungskosinus der Normalen der Fläche im Punkte $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z} = -1$, so ergibt sich eindeutig

$$\mathfrak{X} = 1 \qquad \mathfrak{Y} = 0 \qquad \mathfrak{Z} = 0.$$

Die Normale der Fläche steht senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{x} = 0$. Die Fläche berührt die Ebene $\mathfrak{x} = 0$ längs der Geraden $\mathfrak{z} = -1$. Übertragen wir diese Resultate auf die Zentrafläche im $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$-Raum, so ergibt sich

Satz 16. *Der erste Mantel berührt und durchdringt die unendlich ferne Ebene längs der unendlich fernen Geraden der η, ζ-Ebene.*

Eine geometrische Illustration zu diesen Resultaten kann folgende Betrachtung liefern. Bei der projektiven Transformation, die wir angewandt haben, geht jede Gerade senkrecht zur Ebene $\eta = 0$, also eine Gerade $\xi = \frac{\xi_0'}{\tau_0'}$, $\zeta = \frac{\zeta_0'}{\tau_0'}$ in eine Gerade $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$, also eine Gerade senkrecht zur Ebene $\mathfrak{y} = 0$ über, die aus $\eta = 0$ entsteht. Die Projektionen einer Raumkurve ρ auf die Ebene $\eta = 0$ gehen demnach über in die Projektionen der projektiven Umformung r der Raumkurve ρ auf die Ebene $\mathfrak{y} = 0$. Nun geht eine Neilsche Parabel mit der ξ-Achse als Symmetrieachse in der Ebene $\eta = 0$ bei einer projektiven Umformung dieser Ebene über in eine allgemeine Kurve dritten Grades mit Spitze, die eine Wendetangente hat (Fig. 15). Diese entspricht der unendlich fernen Geraden der ursprünglichen Ebene, ihr Berührungspunkt dem unendlich fernen Punkt der ζ-Achse. Im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-Raum sind demnach die Projektionen der Kurven $\gamma = \text{konst.}$ Kurven dritter Ordnung, die die $\mathfrak{z}$-Achse als Wendetangente im Punkte $\mathfrak{z} = -1$ berühren. Von hier aus kann man wieder für die Kurven $\gamma = \text{konst.}$ im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-Raum, die zur Ebene $\mathfrak{y} = 0$ symmetrisch sind, schliessen, dass sie die Ebene $\mathfrak{x} = 0$ in den Punkten der Geraden $\mathfrak{z} = -1$ berührend durchsetzen.

Auf dem zweiten Mantel kann nur γ unendlich werden, während $\varkappa$ zwischen a und b liegt. Wir führen jetzt $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$ als Parameter ein und schreiben die Gleichungen 4) homogen:

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = \left(\frac{3}{4}(a+b) - \frac{3}{2}\varkappa_0\right)\gamma' - \frac{1}{2} : \gamma'^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1-a\gamma')(a-\varkappa_0)^3}{a(a-b)}}$$

$$: \pm\gamma'^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1-b\gamma')(\varkappa_0-b)^3}{b(a-b)}} : 2\gamma'.$$

Für $\gamma' = 0$ erhält man

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = -\frac{1}{2} : 0 : 0 : 0.$$

Dem Parameterwert $\gamma = \infty$ entspricht also der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse. Zur näheren Untersuchung des Verhaltens der Fläche führen wir

$$\gamma'' = \varepsilon_\eta \gamma'^{\frac{1}{2}},$$

wo ε_η das Vorzeichen von η ist, als Parameter ein, so dass

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}(a+b) - \frac{3}{2}x_0\right)\gamma''^2$$

$$: \gamma'' \sqrt{\frac{(a-x_0)^3(1-a\gamma''^2)}{a(a-b)}} : \pm\gamma'' \sqrt{\frac{(b-x_0)^2(1-b\gamma''^2)}{b(a-b)}} : 2\gamma''^2$$

wird. Hierbei gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem in dem betreffenden Punkte η und ζ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen hatten. Formen wir jetzt den Raum in derselben Weise wie oben projektiv um, so wird

$$\xi = +4\gamma''^2\left(1 \pm 2\gamma'' \sqrt{\frac{(x_0-b)^3}{b(a-b)}} + \cdots\right)$$

$$\eta = -2\gamma'' \sqrt{\frac{(a-x_0)^3}{a(a-b)}}\left(1 \pm 2\gamma'' \sqrt{\frac{(x_0-b)^3}{b(a-b)}} + \cdots\right)$$

$$\zeta = \pm 2\gamma'' \sqrt{\frac{(x_0-b)^3}{b(a-b)}}\left(1 \pm 2\gamma'' \sqrt{\frac{(x_0-b)^3}{b(a-b)}} + \cdots\right),$$

so dass dem Werte $\gamma'' = 0$ der Koordinatenanfangspunkt entspricht. Da ξ mit γ'' sein Zeichen nicht ändert, durchdringen die Kurven $x = x_0$ die Ebene $\xi = 0$ nicht. Da ξ von höherer Ordnung ist als η und ζ, berühren sie die Ebene $\xi = 0$ im Koordinatenanfangspunkt, und zwar laufen sie in zwei zu einander symmetrischen Richtungen:

$$\frac{\eta}{\zeta} = \pm \sqrt{\frac{(a-x)^3 b}{(x-b)^3 a}}$$

durch den Koordinatenanfangspunkt, so dass dieser ein Doppelpunkt ist. Nur für $x = a$ oder $x = b$ fallen die beiden Richtungen in eine $\frac{\eta}{\zeta} = 0$ oder $\frac{\zeta}{\eta} = 0$ zusammen. Damit folgt für die konjugierten Kurven der Zentrafläche selbst:

Satz 17. *Der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse ist Doppelpunkt der konjugierten Kurven des zweiten Mantels.*

Die Richtungskosinus der Normalen berechnen sich zu:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16\gamma''^2 \dfrac{\varkappa}{(a-\varkappa)(\varkappa-b)}}} + \cdots$$

$$\mathfrak{Y} = \pm \frac{4\gamma'' \sqrt{b(a-\varkappa)}}{\sqrt{[(a-\varkappa)(\varkappa-b) + 16\gamma''^2\varkappa](a-b)}} + \cdots$$

$$\mathfrak{Z} = \pm \frac{4\gamma'' \sqrt{a(\varkappa-b)}}{\sqrt{[(a-\varkappa)(\varkappa-b) + 16\gamma''^2\varkappa](a-b)}} + \cdots$$

Im allgemeinen wird also für $\gamma'' = 0$: $\mathfrak{Y} = 0$ und $\mathfrak{Z} = 0$, hingegen $\mathfrak{X} = 1$: Die Normale der Fläche steht senkrecht auf der Ebene $\xi = 0$, und diese ist damit Tangentialebene an die Fläche im Punkte $\xi = \eta = \zeta = 0$. Dennoch ist der Koordinatenanfangspunkt kein regulärer Punkt der Fläche. Für kleines aber von Null verschiedenes γ'' gehen zwar $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ stetig in die Werte 1, 0, 0 über mit abnehmendem γ'', wenn $\varkappa$ von a und b verschieden ist. Ist aber $\varkappa = a$ oder b (d. h. für einen Punkt der Rückkehrkanten), so ergibt sich unabhängig von γ'' in Übereinstimmung mit den Ableitungen auf Seite 14—18, $\mathfrak{Z}$ bezw. $\mathfrak{Y}$ gleich ± 1, während die beiden anderen Richtungskosinus verschwinden. Übertragen wir diese Ergebnisse auf die Zentrafläche selbst, so ergibt sich:

Satz 18. *Der zweite Mantel der Zentrafläche des elliptischen Paraboloides berührt die unendlich ferne Ebene im unendlich fernen Punkt der ζ-Achse. Dieser ist als Schnittpunkt zweier Rückkehrkanten der Fläche singulär*[1]).

[1]) Satz 16 und Satz 18 sind in Übereinstimmung mit dem Satz von Caspary (a. a. O. pag. 165): „Die unendlich ferne Ebene oskuliert die Fläche der Zentra längs dreier Gerade." Zwei von diesen Geraden sind imaginär und schneiden sich in dem Berührungspunkt des zweiten Mantels mit der unendlich fernen Ebene. Die dritte liegt auf dem ersten Mantel. Beim hyperbolischen Paraboloid werden alle drei Geraden reell (Satz 32).

§ 8. Hinweis auf die Modelle.

Als Abschluss dieses Abschnittes einige erläuternde Bemerkungen zu den Modellen. Die Grundplatten der Modelle liegen parallel zur Ebene $x = 0$ ($\xi = 0$). Die x-Achse ist die Symmetrieachse der Modelle und zwar ist die Richtung der zunehmenden Werte von x die von der Grundplatte nach dem Scheitel der Fläche. Die Richtung der wachsenden Werte von y und z ist auf der Grundplatte angedeutet. Zwei Modelle stellen die Mäntel einzeln dar. Auf ihnen ist die Doppelkurve (schwarz), soweit sie Durchdringungskurve ist, dargestellt und eine Reihe Parameterkurven (die aber nicht gleichen Werten der Zunahme entsprechen) eingezeichnet. Die speziellen Werten a und b der Parameter entsprechenden Kurven sind durch Anschreiben der Werte hervorgehoben. Das dritte Modell stellt die Kombination der Mäntel dar. Dabei ist der erste Mantel rot, der zweite blau angelegt. Da infolge der Durchdringung nicht sämtliche Teile sichtbar gemacht werden konnten, sind in einem Quadranten die in den übrigen sichtbaren Teile von der Doppelkurve an fortgelassen, so dass gerade die dort unsichtbaren zur Darstellung kommen. Dem Modell liegen die Werte $a = 12$, $b = 6$ zu Grunde.

B. Die Zentrafläche eines hyperbolischen Paraboloides.

§ 1. Die Gleichungen der Fläche und die Gestalt der Mäntel.

Die Gleichung 1) stellt ein hyperbolisches Paraboloid dar, wenn $a > 0$, $b < 0$ ist. Die im Abschnitt I A gegebenen analytischen Ableitungen lassen sich auf diesen Fall ohne weiteres übertragen, und die dort gegebenen Gleichungen behalten ihre Gültigkeit. Nur ist bei ihrer Diskussion zu beachten, dass jetzt die Variabilitätsbereiche für $\varkappa$ und γ sich aus den Bereichen b_1 und b_3, also aus zwei nur einseitig endlich begrenzten Bereichen, zusammensetzen, die keinen endlichen Punkt gemein haben. Infolgedessen tritt an die Stelle des Satzes 1

Satz 19. *Die Zentrafläche zum hyperbolischen Paraboloid wird dargestellt durch die Gleichungen*

$$\xi = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(\gamma + 3\varkappa)$$

$$\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\gamma)(a-\varkappa)^3}{a(a-b)}} \qquad a>0 \quad b<0$$

$$\zeta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(b-\gamma)(b-\varkappa)^3}{b(b-a)}}$$

und zwar liefern die Werte

$$-\infty \leqq \gamma \leqq b \qquad a \leqq \varkappa \leqq \infty$$

den ersten Mantel, und die Werte

$$a \leqq \gamma \leqq \infty \qquad -\infty \leqq \varkappa \leqq b$$

den zweiten Mantel. Die beiden Mäntel hängen im Endlichen nicht zusammen.

Ohne weiteres übertragbar sind die Sätze 2 und 3.

Satz 20. *Die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides ist algebraisch.*

Satz 21. *Die Symmetrieebenen des hyperbolischen Paraboloides sind auch Symmetrieebenen seiner Zentrafläche.*

Die Schnittkurven der Fläche mit den Symmetrieebenen zeigen jetzt beide denselben Typus, sind nur nach verschiedenen Seiten geöffnet.

Satz 22. *Der Schnitt mit der Symmetrieebene* $\zeta = 0$ *setzt sich zusammen aus einer Neilschen Parabel als Schnittkurve des ersten Mantels und einer gewöhnlichen Parabel als Schnittkurve des zweiten Mantels, die beide nach der Seite der abnehmenden Abszissen geöffnet sind, und sich in zwei Punkten* P *und* P', *entsprechend den Werten* $\gamma = b$, $\varkappa = 3a - 2b$ *auf dem ersten Mantel und* $\gamma = 9a - 8b$, $\varkappa = b$ *auf dem zweiten Mantel, mit den Koordinaten*

$$\xi = -\frac{1}{8}(15a - 13b) \qquad \eta = \pm\sqrt{\frac{2(a-b)^3}{a}}$$

schneiden (Fig. 16).

Satz 23 *Der Schnitt mit der Symmetrieebene* $\eta_1 = 0$ *setzt sich zusammen aus einer Neilschen Parabel als Schnitt des zweiten Mantels und einer gewöhnlichen Parabel als Schnitt des ersten Mantels, die beide nach der Seite der zunehmenden Abszissen geöffnet sind und sich in zwei Punkten* Q_1 *und* Q_2 *mit den Koordinaten*

$$\bar{\xi} = + \frac{1}{8}(13\,a - 15\,b) \qquad \bar{\eta} = \pm \sqrt{-\frac{2\,(a-b)^3}{b}}$$

auf dem ersten Mantel den Werten $\gamma = 9\,b - 8\,a$, $\varkappa = a$, *auf dem zweiten Mantel den Werten* $\gamma = a$, $\varkappa = 3\,b - 2\,a$ *entsprechend, schneiden* (Fig. 17).

Satz 24. *Die in den Symmetrieebenen liegenden konjugierten Kurven, die gewöhnlichen Parabeln, sind Rückkehrkanten der Fläche.*

Satz 25. *Die Parameterkurven* $\gamma = \gamma_0$ *des ersten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene* $\zeta = 0$ *symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder auf der Rückkehrkante* $\varkappa = a$ *in der Ebene* $\eta_1 = 0$ *einen Rückkehrpunkt hat und sich von diesem in zwei zur Ebene* $\eta = 0$ *symmetrischen Bögen nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche zieht* (Fig. 18). *Für* $\gamma_0 = b$ *entartet die Kurve in eine ebene Kurve, indem die beiden Äste in den Schnitt des Mantels mit der Symmetrieebene* $\zeta = 0$ *zusammenrücken* (Fig. 20).

Satz 26. *Die Parameterkurven* $\varkappa = \varkappa_0$ *des ersten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene* $\eta = 0$ *symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder auf der Kurve* $\gamma = b$ *in der Ebene* $\zeta = 0$ *einen Scheitel hat und sich von diesem in zwei zur Ebene* $\zeta = 0$ *symmetrischen Bögen nach der Seite der zunehmenden Abszissen ins Unendliche erstreckt* (Fig. 19). *Für* $\varkappa = b$ *entartet die Kurve in eine ebene Parabel, dadurch, dass die beiden Äste in den Schnitt des Mantels mit der Ebene* $\eta_1 = 0$ *zusammenrücken* (Fig. 20).

Satz 27. *Die Parameterkurven* $\gamma = \gamma_0$ *des zweiten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene* $\eta_1 = 0$ *symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder auf der Rückkehrkante* $\varkappa = b$ *in der Ebene* $\zeta = 0$ *einen Rückkehrpunkt hat und sich von diesem in zwei zur Ebene*

$\zeta = 0$ *symmetrischen Bögen nach der Seite der zunehmenden Abszissen ins Unendliche erstreckt* (vergl. Fig. 21 und Modell 4).

Satz 28. *Die Parameterkurven* $\varkappa = \varkappa_0$ *des zweiten Mantels bestehen aus zwei zur Ebene* $\zeta = 0$ *symmetrisch liegenden Ästen, deren jeder auf der Kurve* $\gamma = a$ *in der Ebene* $\zeta = 0$ *einen Scheitel hat und sich von diesem in zwei zur Ebene* $\eta = 0$ *symmetrischen Bögen nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche erstreckt* (Fig. 22 u. 23).

Zwischen beiden Mänteln besteht demnach nicht ein solch tiefgehender Unterschied in topographischer Hinsicht, wie zwischen den beiden Mänteln der Zentrafläche des elliptischen Paraboloids. Man kann sagen, der eine ist das um 90^0 um die ξ-Achse gedrehte Spiegelbild des anderen an einer Ebene $\xi =$ konst.

---

§ 2. Die Doppelkurve.

Auf die analytischen Entwickelungen des § 6 bis zur Aufstellung der Gleichungen 11) und 12) hat das Vorzeichen von b keinen Einfluss. Zwei Wertpaare $\gamma_1, \varkappa_1$ und $\gamma_2, \varkappa_2$, die dieselben Werte für $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ nach den Formeln 4) für die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides liefern sollen, müssen auch die Gleichungen 11) und 12) befriedigen.

Wollen wir diskutieren, welche von diesen, die drei Gleichungen 11) und 12) befriedigenden Wertequadrupeln zulässig sind, d. h. reelle Werte $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ nach 4) liefern, so deuten wir $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ wieder als rechtwinkelige Koordinaten. 11) stellt in der $\varkappa_1, \varkappa_2$-Ebene eine Hyperbel mit den Scheiteln A ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = a$) und B ($\varkappa_1 = \varkappa_2 = b$) und zwei Asymptoten, die gegen die Hauptachse $\varkappa_1 = \varkappa_2$ um 60^0 geneigt sind, dar. Die Figur ist nur insofern umgeändert, als wegen $b < 0$ der (für die Betrachtung ganz nebensächliche) Koordinatenanfangspunkt $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ zwischen A und B liegt. Jetzt fallen aber die Werte $a > \varkappa > b$ nach Satz 19 aus; die Punkte der Streifen

$$b < \varkappa_1 < a$$
$$b < \varkappa_2 < a$$

liefern also keinen reellen Punkt der Zentrafläche. Das sind gerade die auf dem Bogen A D und den vier dazu symmetrischen

Bogen gelegenen Punkte. Von den vier übrigen rechtwinkeligen Sektoren der x_1, x_2-Ebene fallen weiter die beiden weg, durch die die Gerade $x_1 = x_2$ geht. Diese enthalten ja nur die Scheitel A und B der Hyperbel, und da sich nach 11) und 12) für $x_1 = x_2$ gleich a bezw. b auch $\gamma_1 - \gamma_2 = a$ bezw. b ergibt, liefern diese keine reellen Punkte der Fläche. Da man sich nach einer Überlegung, die der auf Seite 29 angestellten analog ist, auf die Halbebene $x_2 < x_1$ beschränken kann, hat man also nur zu untersuchen, ob in dem Raume

$$x_1 \geqq a$$
$$x_2 \leqq b$$

Punkte der Hyperbel 11) liegen und was für Werte γ_1 und γ_2 diesen Punkten nach 12) entsprechen. Nun schneidet die eine Begrenzung $x_2 = b$ des Bereiches die Hyperbel im Punkte D: $x = 3a - 2b$. Bei D tritt ein ins Unendliche reichender Bogen der Hyperbel in den Bereich ein. Längs dieses Bogens ist

$$3a - 2b \leqq x_1 \leqq \infty$$
$$b \geqq x_2 \geqq -\infty,$$

und zwar werden x_1 und x_2 gleichzeitig unendlich von der Art, dass

$$\lim \frac{x_2}{x_1} = -(2 - \sqrt{3})$$

ist. Nach 12) ist dann

$$b \geqq \gamma_1 \geqq -\infty,$$

und zwar wird γ_1 mit x_1 so unendlich, dass

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{\gamma_1}{x_1} = -(2 - \sqrt{3})^2$$

und

$$9a - 8b \leqq \gamma_2 \leqq \infty$$

mit

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{\gamma_2}{x_1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Dem Punkte D entsprechen nach Seite 42 die Punkte P und P', in denen sich die Schnittkurven der beiden Mäntel mit der Ebene $\zeta = 0$ schneiden. Demnach repräsentiert der sich von D aus ins Unendliche erstreckende Bogen der Hyperbel zwei reelle zur Ebene $\gamma_i = 0$ symmetrisch liegende Zweige der Doppelkurve, die sich von P und P' nach der Seite der abnehmenden Abszissen ins Unendliche erstrecken.

Die andere Begrenzung des Bereiches, die Gerade $x_1 = \bar{a}$ schneidet die Hyperbel im Punkte E: $x_2 = 3b - 2a$. Bei E tritt ein ins Unendliche reichender Bogen des zweiten Astes der Hyperbel in den Bereich ein. Längs dieses Bogens ist:

$$a \leqq x_1 \leqq \infty$$
$$b \geqq x_2 \geqq -\infty,$$

und zwar ist

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{x_2}{x_1} = -(2+\sqrt{3}),$$

Nach 12) wird dann

$$9b - 8a \geqq \gamma_1 \geqq -\infty,$$

wobei

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{\gamma_1}{x_1} = -(2+\sqrt{3})^2,$$

und

$$a \leqq \gamma_2 \leqq \infty$$

mit

$$\lim_{x_1 = \infty} \frac{\gamma_2}{x_1} = (2-\sqrt{3}).$$

Dem Punkt E entsprechen demnach die beiden Punkte Q_1 und Q_2 (Seite 43), die die Schnittkurven der beiden Mäntel mit der Ebene $\eta_1 = 0$ gemein haben. Dem von E sich ins Unendliche erstreckenden Bogen der Hyperbel entsprechen demnach ebenfalls zwei reelle Äste der Doppelkurve, die sich von den Punkten Q_1 und Q_2 aus in je zwei zur Ebene $\eta_1 = 0$ symmetrischen Bogen ins Unendliche ziehen. Die Punkte P, P', Q_1 und Q_2 ergeben sich durch dieselbe Betrachtung, wie wir sie Seite 30—31 angestellt haben, als Rückkehrpunkte der Doppelkurve. Es gilt somit

Satz 29. *Die beiden Mäntel der Zentrafläche eines hyperbolischen Paraboloides durchdringen sich in einer Kurve, die aus vier verschiedenen im Endlichen getrennten Zweigen besteht; jeder dieser Zweige hat einen Rückkehrpunkt in einer der Symmetrieebenen und zieht sich von diesem aus in zwei zu dieser Ebene symmetrischen Bögen ins Unendliche.*

Wir fanden (Seite 31—34), dass bei der Zentrafläche des elliptischen Paraboloides auch für gewisse imaginäre Werte der Parameter die Koordinaten ξ, η, ζ reell ausfallen, und dass die

entsprechenden Punkte die Doppelkurve fortsetzen. Die Frage, ob es solche Parameterwerte auch bei der Zentrafläche zum hyperbolischen Paraboloid gibt, führt zu derselben Bedingungsgleichung

$$13) \qquad \bar{\bar{\varkappa}}^2 = -3\,(a-\bar{\varkappa})\,(b-\bar{\varkappa}),$$

der der reelle und immaginäre Teil $\bar{\varkappa}$ bezw. $\bar{\bar{\varkappa}}$ genügen müssen, wenn $\varkappa = \bar{\varkappa} + i\,\bar{\bar{\varkappa}}$ zusammen mit der sich nach 14) berechnenden Grösse $\gamma_1 = \bar{\gamma} + i\,\bar{\bar{\gamma}}$ reelle Werte von $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ nach 4) liefern soll. Für reelle Werte von $\bar{\varkappa}$ und $\bar{\bar{\varkappa}}$, die 13) erfüllen, fallen aber $\varkappa$ und γ nicht so aus, dass die Radikanten von 4) gleichzeitig positiv sind. Soll dies der Fall sein, so muss wegen $b < 0$

$$(a-\gamma)\,(a-\varkappa)^3 < 0$$
$$(b-\gamma)\,(b-\varkappa)^3 < 0$$

sein. Nach den Formeln 14) haben die beiden Produkte dasselbe Zeichen wie $(a-\bar{\varkappa})\,(a+b-2\,\bar{\varkappa})$ bezw. $(b-\bar{\varkappa})\,(a+b-2\,\varkappa)$. Diese Ausdrücke haben für jeden nach 13) zulässigen Wert

$$a \geqq \varkappa \geqq b$$

verschiedenes Zeichen. Die Doppelkurve der Fläche hat also keine isolierten Zweige, sondern besteht nur aus der Durchdringungskurve der beiden reellen Mäntel.

---

§ 3. Verhalten der Fläche im Unendlichfernen.

Der Variabilitätsbereich $b_1 + b_3$ für γ und $\varkappa$ enthält ∞ als zulässigen Parameterwert, und zwar kann dieser sowohl von der positiven, als auch von der negativen Seite, schliesslich auch von beiden Parametern gleichzeitig erreicht werden. Wir führen deshalb anstelle der beiden Parameter ihre reziproken Werte γ', $\varkappa'$ ein, deren jeder zwischen den Grenzen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ variieren kann, aber nicht beliebig, sondern mit der Einschränkung $\gamma' \cdot \varkappa' \leq 0$. Der Wert 0 ist also der einzige, den beide Parameter gleichzeitig

annehmen dürfen. Führen wir, wie in § 7 Abschnitt I, homogene Koordinaten ein, so wird

$$17) \qquad \xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = -\left(\sqrt{-\frac{\varkappa'^3}{\gamma'}} + 3\sqrt{-\varkappa'\gamma'}\right)$$

$$+\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{-\varkappa'^3\gamma'} : \pm 2\sqrt{\frac{(1-a\gamma')(1-a\varkappa')^3}{a(a-b)}}$$

$$: 2\sqrt{\frac{(1-b\gamma')(1-b\varkappa')^3}{-b(a-b)}} : 4\sqrt{-\varkappa'^3\gamma'}.$$

Lassen wir erstens $\varkappa'$ allein verschwinden, so ergibt sich

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = 0 : \pm\sqrt{-\frac{1-a\gamma'}{a}} : \pm\sqrt{\frac{1-b\gamma'}{b}} : 0.$$

Dieses Gleichungssystem stellt die unendlich ferne Gerade der η, ζ-Ebene dar, und zwar in ihrer ganzen Ausdehnung. Denn der Quotient

$$\frac{\eta'}{\zeta'} = \pm\sqrt{-\frac{(1-a\gamma')b}{(1-b\gamma')a}}$$

nimmt für $\frac{1}{a} \geqq \gamma' \geqq \frac{1}{b}$ jeden Wert einmal an, und zwar für jeden Wert von γ' ergeben sich zwei entgegengesetzte Werte von $\frac{\eta'}{\zeta'}$, die nur für $\gamma' = \frac{1}{a}$ und $\gamma' = \frac{1}{b}$ zusammen fallen. Jede Kurve $\gamma = \gamma_0$ hat mit der unendlich fernen Geraden der η, ζ-Ebene zwei Punkte gemein. In dem einen Punkte

$$\frac{\eta'}{\zeta'} = +\sqrt{-\frac{(1-a\gamma')b}{(1-b\gamma')a}}$$

treffen die beiden Äste zusammen, längs denen $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ gleiches Vorzeichen haben; in dem anderen

$$\frac{\eta'}{\zeta'} = -\sqrt{-\frac{(1-a\gamma')b}{(1-b\gamma')a}}$$

hängen die beiden Zweige zusammen, längs denen $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$ verschiedenes Vorzeichen haben. Somit gilt

Satz 30. *Die geodätischen Kurven der Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides sind im projektiven Raum geschlossene Kurven.*

Der Unterschied gegen Satz 15 liegt darin, dass Satz 30 für die geodätischen Kurven beider Mäntel gültig ist. Die unendlich ferne Gerade der $\eta\,3$-Ebene liegt z. T. auf dem ersten, z. T. auf dem zweiten Mantel. Für den ersten Mantel ($\gamma' \leqq 0$) ist

$$-\sqrt{-\frac{a}{b}} \leqq \frac{3'}{\eta'} \leqq +\sqrt{-\frac{a}{b}},$$

für den zweiten Mantel ($\gamma' \geqq 0$):

$$-\sqrt{-\frac{b}{a}} \leqq \frac{\eta'}{3'} \leqq +\sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

In den Punkten $\frac{\eta'}{3'} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ tritt die unendlich ferne Gerade der $\eta\,3$-Ebene aus dem einen Mantel in den anderen über.

Um das Verhalten der Fläche in einem Punkte der unendlich fernen Geraden der $\eta\,3$-Ebene, es möge der Punkt

$$\frac{\eta'}{3'} = +\sqrt{-\frac{(1-a\gamma')b}{(1-b\gamma')a}}$$

sein, zu studieren, wollen wir anstelle von $\varkappa'$ einen neuen Parameter einführen, da $\varkappa'$ in der Umgebung der unendlich fernen Geraden der $\eta\,3$-Ebene einen Punkt nicht eindeutig auf einer Kurve $\gamma = \gamma_0$ bestimmt. Diese Bedingung erfüllt für $\gamma_0' \neq 0$ der wegen $\varkappa' \cdot \gamma' \leqq 0$ stets reelle Parameter

$$\sigma = \varepsilon_\eta \cdot \sqrt{-\varkappa'\gamma_0'},$$

wo ε_η das Vorzeichen von η ist. Dann wird

$$\xi' : \eta' : 3' : \tau' = -3\sigma - \frac{\sigma^3}{\gamma_0'^2} + \frac{3}{2}(a+b)\frac{\sigma^3}{\gamma_0'}$$

$$: 2\sqrt{\frac{(1-a\gamma_0')(1+a\frac{\sigma^2}{\gamma_0'})^3}{a(a-b)}} : 2\sqrt{\frac{(1-b\gamma_0')(1+b\frac{\sigma^2}{\gamma_0'})^3}{-b(a-b)}} : 4\frac{\sigma^3}{\gamma_0'}$$

Durch die kollineare Transformation (vergl. Seite 37)

$$\xi = \frac{\tau'}{\tau' + \xi' + \zeta'}$$

$$\eta = \frac{\eta'}{\tau' + \xi' + \zeta'}$$

$$\zeta = \frac{-\zeta'}{\tau' + \xi' + \zeta'}$$

geht die Kurve $\gamma = \gamma_0$ über in die Kurve

$$\xi = + \frac{2\sigma^3}{\gamma_0'} \sqrt{-\frac{b(a-b)}{1-b\gamma_0'}} \left(1 + \frac{3\sigma}{2} \sqrt{-\frac{b(a-b)}{1-b\gamma_0'}} + \dots\right)$$

$$\eta = \sqrt{-\frac{b(1-a\gamma_0')}{a(1-b\gamma_0')}} \left(1 + \frac{3\sigma'}{2} \sqrt{-\frac{b(a-b)}{1-b\gamma_0'}} + \dots\right)$$

$$\zeta = -\left(1 - \frac{3\sigma}{2} \sqrt{-\frac{b(a-b)}{1-b\gamma_0'}} + \dots\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Kurve $\gamma = \gamma_0$ die Ebene $\xi = 0$ im Punkte $\varkappa' = 0$ berührend durchdringt. Dasselbe ergibt sich für jede andere Kurve $\gamma = \gamma_0$. Berechnet man die Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Normalen der Fläche im Punkte $\xi = 0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = -1$, der den Parameterwerten $\sigma = 0$, $\gamma' = \gamma_0'$ entspricht, so folgt

$$\mathfrak{X} = 1 \qquad \mathfrak{Y} = 0 \qquad \mathfrak{Z} = 0.$$

Die Normale steht senkrecht auf der Ebene $\xi = 0$. Die Fläche berührt und durchdringt die Ebene $\xi = 0$. Überträgt man diese Resultate auf die Zentrafläche und ihre Schnittgerade mit der unendlich fernen Ebene, so folgt, dass die Zentrafläche die unendlich ferne Ebene längs der unendlich fernen Geraden der $\eta\zeta$-Ebene berührt und durchdringt.

Setzen wir zweitens $\gamma' = 0$, so folgt aus den Gleichungen 17)

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = 1 : 0 : 0 : 0.$$

Die Kurve $\gamma = \gamma_0$ entartet also mit wachsendem Werte von $|\gamma_0|$ in den unendlich fernen Punkt der ξ-Achse. Zur näheren Untersuchung führen wir

$$\sigma = \varepsilon_1 \sqrt{-\varkappa_0' \gamma'}$$

als Parameter ein und erhalten aus 17)

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = -(\varkappa_0'^2 - 3\sigma^2) - \frac{3}{2}(a+b)\varkappa_0'\sigma^2$$

$$: 2\sigma\sqrt{\frac{(1-\frac{\sigma^2}{\varkappa_0'}a)(1-a\varkappa_0')^3}{a(a-b)}} : 2\sigma\sqrt{\frac{(1-\frac{\sigma^2}{\varkappa_0'}b)(1-b\varkappa_0')^3}{-b(a-b)}} : 4\varkappa_0'\sigma^2.$$

Vermöge der schon des öfteren angewandten kollinearen Transformation geht die Kurve $\varkappa' = \varkappa_0'$ über in die Kurve

$$\xi = +\frac{4\sigma^2}{\varkappa_0'}\left(1 + \frac{2\sigma}{\varkappa_0'^2}\sqrt{\frac{(1-b\varkappa_0')^3}{-b(a-b)}} + \cdots\right)$$

$$\eta = -\frac{2\sigma}{\varkappa_0'^2}\sqrt{\frac{(1-a\varkappa_0')^3}{a(a-b)}}(1+\cdots)$$

$$\zeta = \pm\frac{2\sigma}{\varkappa_0'^2}\sqrt{\frac{(1-b\varkappa_0')^3}{-b(a-b)}}(1+\cdots).$$

Mithin ist der Punkt $\sigma = 0$ ein Doppelpunkt für die Kurve $\varkappa' = \varkappa_0'$, in dem sich zwei Bogen in den Richtungen

$$\frac{\eta}{\zeta} = \pm\sqrt{-\frac{(1-a\varkappa_0')^3 b}{(1-b\varkappa_0')^3 a}}$$

kreuzen. Nur für $\varkappa_0' = \frac{1}{a}$ oder $\varkappa_0' = \frac{1}{b}$ fallen beide Richtungen in eine einzige $\frac{\eta}{\zeta} = 0$ oder $\frac{\zeta}{\eta} = 0$ zusammen. Überträgt man diese Resultate auf die Kurven $\varkappa = \varkappa_0$ der Zentrafläche, so folgt:

Satz 31. *Der unendlich ferne Punkt der ξ-Achse ist Doppelpunkt der konjugierten Kurven der Zentrafläche.*

Dieses Ergebnis gilt wieder (im Gegensatz zu Satz 17) für alle konjugierten Kurven der Fläche. Für die des ersten Mantels ergibt sich $-\sqrt{-\frac{b}{a}} < \frac{\eta}{\zeta} < +\sqrt{-\frac{b}{a}}$, für die des zweiten Mantels wird $-\sqrt{-\frac{a}{b}} < \frac{\zeta}{\eta} < +\sqrt{-\frac{a}{b}}$. Die Richtungen des ersten Mantels werden also von denen des zweiten Mantels durch die Werte getrennt, die $\frac{\eta}{\zeta}$ für $\varkappa_0' = 0$ annimmt.

Berechnet man die Richtungskosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Normalen im Punkte σ, $\varkappa_0'$ der transformierten Fläche, so ergibt sich:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16\,\frac{\sigma^2}{(a\,\varkappa_0' - 1)(b\,\varkappa_0' - 1)}}}$$

$$\mathfrak{Y} = \pm 4\,\sigma \sqrt{\frac{-\,b\,(1 - a\,\varkappa_0')}{\left((1 - a\,\varkappa_0')(1 - b\,\varkappa_0') + 16\,\sigma^2\right)(a - b)}}$$

$$\mathfrak{Z} = +4\,\sigma \sqrt{\frac{a\,(1 - b\,\varkappa_0')}{\left((1 - a\,\varkappa_0')(1 - b\,\varkappa_0') + 16\,\sigma^2\right)(a - b)}}.$$

Im allgemeinen nehmen diese Grössen für $\sigma = 0$ die Werte 1, 0, 0 an. Die Normale der Fläche steht senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{x} = 0$ und diese ist Tangentialebene der Fläche im Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$. Trotzdem ist der Koordinatenanfangspunkt kein regulärer Punkt der Fläche. Ist nämlich $\varkappa' = -\frac{1}{a}$ oder $\varkappa' = -\frac{1}{b}$, so verschwinden für beliebiges σ zwei der Richtungskosinus, während der dritte sowohl den Wert $+1$ als auch den Wert -1 haben kann (entsprechend dem Umstand, dass die Parameterkurven $\varkappa = a$ und $\varkappa = b$ Rückkehrkanten sind). Längs dieser beiden Kurven gehen somit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ nicht stetig in die Werte 1, 0, 0 über, die wir oben als dem Wert $\sigma = 0$ entsprechend fanden. Überträgt man diese Ergebnisse auf die Zentrafläche, so folgt, dass sie die unendlich ferne Ebene in dem unendlich fernen Punkt der ξ-Achse zwar berührt, dass dieser Punkt aber kein regulärer Punkt, sondern der Schnittpunkt zweier Rückkehrkanten ist (vergl. Fig. 25).

Drittens kann γ und $\varkappa$ gleichzeitig unendlich werden. Neue Elemente, die die unendlich ferne Ebene mit der Fläche gemein hat, liefert das jedoch nur, wenn

$$-\frac{\varkappa'^3}{\gamma'} = m^2\,(>0)$$

eine endliche Grösse ist. Wir können dann $\varkappa' = -w$, $\gamma' = \frac{w^3}{m^2}$ setzen und erhalten

$$\xi' : \eta' : \mathfrak{Z}' : \tau' = -(m^2 + 3\,w^2) + \frac{3}{2}(a + b)\,w^3$$

$$: \pm m \sqrt{\frac{(1 - a\,\frac{w^3}{m^2})(1 + a\,w)^3}{a\,(a - b)}} : \pm m \sqrt{\frac{(1 - b\,\frac{w^3}{m^2})(1 + b\,w)^3}{-\,b\,(a - b)}} : 4\,w^3.$$

Aus diesem System folgt für $w = 0$

$$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = -m^2 : \pm\sqrt{\frac{1}{a}} : \sqrt{-\frac{1}{b}} : 0.$$

Diese Gleichungen stellen zwei unendlich ferne Geraden dar, die sich im unendlich fernen Punkte der ξ-Achse schneiden und die unendlich ferne Gerade der $\eta\zeta$-Ebene in den Punkten

$$\eta : \zeta \quad \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

treffen. Für verschwindende Werte von m, d. h. wenn x^3 stärker unendlich wird als γ, ergeben sich die beiden Punkte $\frac{\eta}{\zeta} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ der unendlich fernen Geraden der $\eta\zeta$-Ebene. Für $m = \infty$, d. h. wenn x^3 schwächer unendlich wird als γ, erhält man den Schnittpunkt der beiden Geraden, den unendlich fernen Punkt der ξ-Achse.

Durch die kollineare Umformung ergibt sich

$$\xi = \frac{4w^3}{\pm m\left(2\sqrt{\frac{1}{-b(a-b)}} \mp m\right)} + \cdots$$

$$\eta \quad \frac{2\sqrt{-\frac{b}{a}}}{2 \mp m\sqrt{-b(a-b)}}\left(1 - \frac{3w}{2}\frac{2(a-b) - ma\sqrt{-b(a-b)}}{2 - m\sqrt{-b(a-b)}} + \cdots\right)$$

$$\zeta = \frac{2}{2 \mp m\sqrt{-b(a-b)}}\left(1 + \frac{3bwm\sqrt{-b(a-b)}}{2(2 - m\sqrt{-b(a-b)})} + \cdots\right).$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Fläche die Ebene $\xi = 0$ längs der beiden Geraden

$$\eta = \pm\zeta\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

berührend durchdringt. Für den ersten Mantel ist $w < 0$, für den zweiten $w \geqq 0$. Die beiden Mäntel hängen also längs dieser beiden Geraden zusammen. Überträgt man dieses Ergebnis wieder auf die Zentrafläche selbst, so kann man die Resultate in den Satz zusammenfassen:

Satz 32. *Die Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides berührt und durchdringt die unendlich ferne Ebene in drei Geraden, in der unendlich fernen Geraden der $\eta\zeta$-Ebene und in zwei Geraden durch den unendlich fernen Punkt der*

ξ-Achse. Längs der letzteren gehen die beiden Mäntel stetig ineinander über, so dass die Zentrafläche im projektiven Raume eine geschlossene Fläche ist [1]).

---

§ 4. Hinweis auf das Modell der Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides.

Ich schliesse hieran wieder einige Erläuterungen zum Modell der Zentrafläche des hyperbolischen Paraboloides. Da die beiden Mäntel nach S. 44 topographisch nur unwesentliche Verschiedenheiten zeigen, konnte davon abgesehen werden, sie einzeln zur Darstellung zu bringen. Dafür (und aus technischen Gründen) wurde das Modell der Gesamtfläche aus zwei Stücken bestehend gebildet, die auseinander genommen, jedes einzeln eine Anschauung der Mäntel gibt. Die beiden Mäntel sind durch Farben von einander unterschieden; Parameterkurven sind ebenfalls eingezeichnet und an den Schnitten mit den Symmetrieebenen die entsprechenden Parameterwerte angegeben. Dem Modell liegen die Werte $a = 1{,}5$ cm, $b = -0{,}5$ cm zugrunde.

C. Vergleichende Betrachtung der Zentraflächen für die verschiedenen Flächen eines Systems konfokaler Paraboloide.

Sind a und b zwei reelle Grössen und $a > b$, so stellt die Gleichung

18a) $$x - \frac{a+b-2\rho}{2} + \frac{y^2}{a-\rho} + \frac{z^2}{b-\rho} = 0$$

oder das ihr gleichwertige Gleichungssystem

---

[1]) Vergl. Anmerk. auf Seite 40.

$$x = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{1}{4}(p_1+p_2)$$

18b)
$$y = \pm\sqrt{-\frac{(a-\rho)(a-p_1)(a-p_2)}{4(a-b)}}$$

$$z = \pm\sqrt{-\frac{(b-\rho)(b-p_1)(b-p_2)}{4(b-a)}}$$

die Schar der konfokalen Paraboloide mit den Brennpunkten $F_1\left(-\frac{a-b}{8}, 0, 0\right)$ und $F_2\left(+\frac{a-b}{8}, 0, 0\right)$ dar. Reelle Punkte erhält man aus 18) nur, wenn von den Grössen ρ, p_1, p_2 eine einen Wert λ, eine einen Wert μ und eine einen Wert ν annimmt, wo die Grössen λ, μ und ν durch die nur von a und b abhängigen Ungleichungen auf Seite 8 bestimmt sind. p_1 und p_2 sind dabei die Parameter der Krümmungslinien. Die Werte der Parameter der Krümmungslinien sind für alle Werte von ρ dieselben, so lange ρ innerhalb eines Variabilitätsbereiches b_1 variiert. Das bringt zum Ausdruck, dass die Krümmungslinien der Fläche ρ die Schnittkurven mit denselben beiden Scharen p_1 und p_2 konfokaler Flächen sind, solange die Fläche ρ ihren Typus nicht ändert. Durch die Ableitungen des § 1 des Abschnittes 1 A erhält man als Gleichungen für die Zentrafläche zu einer Fläche 18)

$$\bar{\xi} = \frac{3}{8}(a+b) + \frac{1}{4}\rho - \left(\frac{3}{4}\varkappa + \frac{1}{4}\gamma\right)$$

19)
$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\gamma)(a-\varkappa)^3}{(a-\rho)(a-b)}}$$

$$\bar{\zeta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\gamma)(b-\varkappa)^3}{(b-\rho)(b-a)}},$$

wo γ und $\varkappa$ nicht miteinander und nicht mit ρ demselben Bereich b_i angehören dürfen. Auch die Variabilitätsbereiche von γ und $\varkappa$ bleiben dieselben, solange ρ innerhalb eines Bereiches b_i sich verändert.

Geht man von einem Werte ρ_1 zu einem Werte ρ_2 desselben Bereiches b_i über, so ergibt sich aus der ersten Gleichung 19)

für die denselben Werten $(\gamma, \varkappa)$ entsprechenden Werte $\bar{\xi}_1$ und $\bar{\xi}_2$ von $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 = \frac{3}{4}(\rho_2 - \rho_1) .$$

Da $\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1$ von γ und $\varkappa$ unabhängig ist, bleibt jeder Schnitt einer Ebene senkrecht zur ξ-Achse mit der Fläche bei der Veränderung von ρ ein solcher ebener Schnitt. Alle ebenen Schnitte senkrecht zur ξ-Ebene werden um dieselbe Grösse $\frac{3}{4}(\rho_2 - \rho_1)$ verschoben.

Hieraus folgt weiter, dass die Ebenen senkrecht zur ξ-Achse, in denen die Scheitel S_1, S_2 der beiden Mäntel, die Berührungspunkte C_1 und C_2 bezw. die Schnittpunkte der beiden Kurven, in die die Hauptschnitte zerfallen, liegen, einen von ρ unabhängigen Abstand haben, und dass ferner der Abstand der beiden Ebenen, zwischen denen die ganz im Endlichen verlaufenden Parameterkurven verlaufen und den wir für alle Parameterkurven einer Art auf einer Fläche als denselben fanden (Abschnitt I A § 5) für alle Flächen desselben Typus derselbe ist.

Aus der zweiten und dritten Gleichung 19) ergibt sich:

$$\bar{\eta}_2 = \sqrt{\frac{a-\rho_1}{a-\rho_2}}\,\bar{\eta}_1$$

$$\bar{\mathfrak{z}}_2 = \sqrt{\frac{b-\rho_1}{b-\rho_2}}\,\bar{\mathfrak{z}}_1 .$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Schnittkurve einer Ebene $\xi = \text{konst.}$ mit der Fläche bei der der Veränderung von ρ entsprechenden Verschiebung in der Ebene affin verändert wird. So ergibt sich

Satz 33. *Variiert ρ innerhalb eines Bereiches b_i, so verändert sich die Fläche* 19) *in der Weise, dass jede Schnittkurve mit einer Ebene $\xi = \text{konst.}$ dieselbe affine Transformation erleidet und dabei um dieselbe Grösse parallel zur ξ-Achse verschoben wird.*

Beachtet man weiter, dass beim Ansatz S. 27 zur Diskussion der Doppelkurve ρ ganz ausfällt, so zeigt sich, dass die Formeln 11) und die entsprechende Figur 13 für alle Werte von ρ gelten, die Doppelkurvendiskussion der Zentraflächen aller Flächen des konfokalen Systems also an demselben Diagramm 13) vorgenommen werden kann.

Ist $\rho < b$, so stellt 18) ein elliptisches Paraboloid dar, wie es dem Abschnitt I A zu Grunde lag; 19) hat die im Abschnitt I A diskutierte Gestalt. Liegt ρ zwischen a und b, so ist 18) ein hyperbolisches Paraboloid, 19) hat die im Abschnitt I B erläuterte Gestalt. Für $\rho > a$ ist das Paraboloid 18) wieder elliptisch, nur nach der Seite der zunehmenden Abszissen geöffnet und seine Nabelpunkte liegen in der Ebene $\mathfrak{z} = 0$. Die Zentrafläche ist dann wieder die im Abschnitt I A beschriebene und nur ihre Orientierung gegen die Koordinatenebenen eine andere. Im folgenden wollen wir untersuchen, wie die Fälle ineinander übergehen, welche Gestalt also die einzelnen Flächen annehmen, wenn sich ρ einem der Werte b oder a von irgend einer Seite nähert. Wir wollen ausführlich den Fall behandeln, dass $\rho < b$ ist und gegen b konvergiert. Im System der konfokalen Paraboloide geht dann das elliptische, nach der Seite der abnehmenden Abszissen geöffnete Paraboloid über in das Gebilde, das aus der Fokalparabel in der Ebene $\mathfrak{z} = 0$ und ihrem doppeltüberdeckten Innern besteht. Der Hauptschnitt des ersten Mantels der Zentrafläche in der Ebene $\mathfrak{z} = 0$ ist die Evolute des betreffenden Hauptschnittes des Paraboloides, geht also für $\rho = b$ in die Evolute der Fokalparabel über. Als Schnitt des zweiten Mantels $\varkappa = b$ ergibt sich für $\rho = b$:

$$\bar{\xi} = \frac{3}{8}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}\gamma$$

$$\bar{\eta} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(a-\gamma)(a-b)};$$

das ist die Fokalparabel selbst. Die Kurve $\varkappa = b$ ist der Ort der zweiten Krümmungsmittelpunkte des Hauptschnittes in der Ebene $\mathfrak{z} = 0$. Da mit abnehmendem $(b - \rho)$ der zweite Krümmungsradius in Punkten des Hauptschnittes gegen Null konvergiert, so zeigt auch die Anschauung, dass die zweiten Krümmungsmittelpunkte im Grenzfall $\rho = b$ mit den Flächenpunkten in die Fokalparabel zusammenfallen.

Der Schnitt der Zentrafläche mit der Ebene $\eta_1 = 0$ zerfällt nach Satz 5 in die Evolute des Hauptschnittes der Ebene $\eta = 0$:

$$\frac{4}{3}\left(\xi - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}b - \frac{1}{4}\rho\right) + (23)^{\frac{2}{3}}(b-\rho)^{\frac{1}{3}} = 0$$

und eine Parabel

$$\zeta^2 (b - \rho) + (a - b)^2 (\xi + \frac{3}{8} a - \frac{1}{8} b - \frac{1}{4} \rho) = 0,$$

die sich in zwei Punkten mit den Koordinaten

$$\bar{\xi} = -\frac{5}{8} a + \frac{3}{8} b + \frac{1}{4} \rho$$

$$\bar{\zeta} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a - b)^3}{b - \rho}}$$

berühren. Mit abnehmendem $(b - \rho)$ wird der Krümmungsradius im Scheitel der Hauptschnittparabel des Paraboloides immer kleiner, während er für die Punkte, die ausserhalb einer mit ρ gegen 0 konvergierenden Umgebung des Scheitels liegen, über alle Grenzen wächst. Entsprechend wird die Evolute immer steiler, ihr Rückkehrpunkt nähert sich dem Scheitel des Paraboloides, und sie artet für $\rho = b$ in das Lot auf die Ebene $\zeta = 0$ im Scheitel der Fokalparabel

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8} (a - b)$$

aus. Gleichzeitig wird die Parabel, die andere Schnittkurve der Zentrafläche, immer steiler und geht für $\rho = b$ in die Gerade

$$\xi = -\frac{3}{8} (a - b),$$

die im Rückkehrpunkt der Evolute zur Fokalparabel auf der Ebene $\zeta = 0$ senkrecht steht, über. Für die beiden Berührungspunkte der beiden Kurven wird $|\zeta|$ mit abnehmendem $(b - \rho)$ immer grösser, während $\bar{\xi}$ gegen

$$\bar{\xi} = \frac{5}{8} (a - b)$$

konvergiert. Im Grenzfall $\rho = b$ ist also der Hauptschnitt der Zentrafläche mit der Ebene $\eta = 0$ ein Paar von Parallelen zur ζ-Achse.

Lassen wir für beliebige Werte von γ und $\varkappa$ in den Formeln 19) ρ gegen b konvergieren, so wächst $\bar{\zeta}$ über alle Grenzen. Das erklärt sich daraus, dass das Paraboloid, abgesehen von der Nachbarschaft des Hauptschnittes der $\xi\eta$-Ebene, immer platter wird, so dass die Normalen immer weniger von Parallelen zur ξ-Achse abweichen und also die ζ-Koordinate des Schnittpunktes benachbarter Normalen absolut genommen immer grösser wird, je weniger ρ von b abweicht.

Nur wenn γ oder $\varkappa$ gleichzeitig mit ρ gegen b konvergieren, so dass $\frac{b-\gamma}{b-\rho} = m$ (erster Mantel) oder $\frac{(b-\varkappa)^3}{b-\rho} = n$ (zweiter Mantel) endliche Grössen sind, so erhält man für $\rho = b$ im ersten Fall:

$$\bar{\xi} = \frac{3}{8}(a+b) - \frac{3}{4}\varkappa$$

$$\eta_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(a-\varkappa)^3}{a-b}}$$

$$\bar{\zeta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-m\frac{(b-\varkappa)^3}{(b-a)}},$$

also für jeden Wert von $\varkappa$ und m einen Punkt, dessen Orthogonalprojektion auf der Evolute der Fokalparabel der Ebene $\bar{\zeta} = 0$ liegt. Im zweiten Fall wird

$$\bar{\xi} = \frac{1}{8}(3a-b) - \frac{1}{4}\gamma$$

$$\bar{\eta} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-(a-\gamma)(a-b)}$$

$$\bar{\zeta} = \pm\sqrt{-n\frac{(b-\gamma)}{b-a}},$$

Da die ersten beiden Gleichungen die Fokalparabel darstellen, liefert dieser Fall für beliebige Werte von γ und n einen geraden Zylinder über der Fokalparabel.

Das gleiche Grenzgebilde erhält man, wenn man $\rho > b$ annimmt und gegen b abnehmen lässt. Somit ergibt sich:

Satz 34. *Für $\rho = b$ entartet die Zentrafläche des Paraboloides* 18) *in die Zylinder, die über der Fokalparabel der Ebene $\bar{\zeta} = 0$ und über deren Evolute auf der Ebene $\bar{\zeta} = 0$ senkrecht stehen. Die Doppelkurve ist das gemeinsame Erzeugendenpaar, das in den beiden Punkten, die die Fokalparabel mit ihrer Evolute gemein hat, auf der Ebene $\bar{\zeta} = 0$ senkrecht steht.*

Auf ganz analoge Weise erhält man

Satz 35. *Für $\rho = a$ entartet die Zentrafläche des Paraboloides* 18) *in die Zylinder, die über der Fokalparabel der Ebene $\eta_1 = 0$ und über deren Evolute auf der Ebene $\eta_1 = 0$ senkrecht stehen. Die Doppelkurve ist das gemeinsame Erzeugendenpaar, das in den beiden Punkten, die die Fokalparabel*

mit ihrer Evolute gemein hat, auf der Ebene $\eta = 0$ *senkrecht steht.*

Die Figuren 26 und 27 veranschaulichen die Veränderungen, die die Hauptschnitte der Zentrafläche erleiden, wenn das Paraboloid das konfokale System 18) durchläuft. In Figur 26 sind die Hauptschnitte der $\xi\,\zeta$-Ebene dargestellt. Im ersten der fünf dargestellten Fälle ist $\rho < b$ als reichlich von b verschieden angenommen. Die beiden Kurven, in die der Hauptschnitt zerfällt, berühren sich in den Krümmungszentren der Nabelpunkte, in denen die Mäntel reell zusammenhängen. Für die zweite Figur ist ρ sehr wenig von b verschieden, Parabel und Evolute sind sehr steil, die Berührungspunkte weit auseinander gerückt. Die dritte Figur zeigt den Fall $\rho = b$, der Hauptschnitt ist ein Paar paralleler Geraden, die beiden Mäntel hängen nicht mehr im Endlichen reell zusammen. Die folgende Figur gibt den Fall, dass ρ wenig grösser als b ist. Die Kurven erstrecken sich nach der Seite der zunehmenden Abszissen ins Unendliche, anstelle der Berührungspunkte treten zwei Schnittpunkte auf, deren ζ-Koordinaten zwar noch sehr gross sind, die aber in der letzten Figur, wo ρ wesentlich grösser als b ist, näher zusammen gerückt sind.

In gleicher Weise gibt die erste Figur 27 den Hauptschnitt in der $\xi\,\eta$-Ebene, wenn ρ wesentlich kleiner als a ist. Die beiden Kurven haben zwei einfache reelle Schnittpunkte. Ist ρ wenig von a verschieden (zweite Figur 27), so sind die Kurven steil, die Schnittpunkte weit auseinandergerückt. Für $\rho = a$ (dritte Figur 27) arten sie in zwei Parallele aus. Für $\rho > a$ treten beim Paraboloid zwei Nabelpunkte in der $\xi\,\eta$-Ebene auf, infolgedessen haben die beiden Mäntel in zwei endlichen Punkten dieser Ebene reellen Zusammenhang, in den zwei Punkten, in denen sich die jetzt nach links geöffnete Parabel und ihre Evolute berühren. Dies stellt die vierte Figur dar für den Fall, dass ρ wenig grösser als a ist, die fünfte dafür, dass ρ wesentlich grösser als a ist. Die Veränderung des Typus erfolgt gerade in umgekehrter Reihenfolge, wie in den Figuren 26.

II. Abschnitt.

Die Zentraflächen zu den Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt.

§ 1. Gleichungen der Zentraflächen und gestaltliche Diskussion der einzelnen Mäntel.

Sind a, b und c drei reelle Grössen, die der Beziehung

$$a > b > c$$

genügen und λ, μ und ν drei Parameter, die bezw. den Bereichen

$$\begin{aligned} b_1 &: -\infty \leqq \lambda \leqq c \\ b_2 &: \quad c \leqq \mu \leqq b \\ b_3 &: \quad b \leqq \nu \leqq a \end{aligned}$$

entnommen sind, so stellen die Gleichungen

$$\bar{x} = \pm \sqrt{-\frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{(c-a)(a-b)}}$$

$$\bar{y} = \pm \sqrt{-\frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{(a-b)(b-c)}}$$

$$\bar{z} = + \sqrt{-\frac{(c-\lambda)(c-\mu)(c-\nu)}{(b-c)(c-a)}}$$

eine Fläche zweiten Grades dar, wenn man einem der drei Parameter einen festen, dem betreffenden Bereiche b_i entnommenen Wert ρ erteilt. Alle auf diese Weise mit denselben Grössen a, b und c darstellbaren Flächen sind konfokal. Eine Fläche $\lambda = \rho$ ist ein Ellipsoid, eine Fläche $\mu = \rho$ ein einschaliges Hyperboloid, eine Fläche $\nu = \rho$ ein zweischaliges Hyperboloid. Ähnlich wie in § 1 des ersten Abschnittes ergibt sich für die Zentrafläche zu einer Fläche ρ die Darstellung

$$\bar{\xi} = \pm \sqrt{-\frac{(a-\gamma)(a-\varkappa)^3}{(a-\rho)(c-a)(a-b)}}$$

20) $$\bar{\eta} = \pm \sqrt{-\frac{(b-\gamma)(b-\varkappa)^3}{(b-\rho)(a-b)(b-c)}}$$

$$\bar{\zeta} = \pm \sqrt{-\frac{(c-\gamma)(c-\varkappa)^3}{(c-\rho)(b-c)(c-a)}}.$$

Die Symmetrieebenen der Urfläche sind auch Symmetrieebenen der Zentrafiäche und schneiden diese in einem Kegelschnitt und in der Evolute des betreffenden Hauptschnittes der Urfläche. Die konjugierten Kurven $\varkappa = \text{konst.}$ projizieren sich auf die Symmetrieebenen als Kegelschnitte oder als Teile von solchen, die geodätischen Kurven als Kegelschnittevoluten oder als Teile von solchen. Wie die Symmetrieebenen, so wird auch die unendlich ferne Ebene in zwei Kurven $\varkappa = \infty$ und $\gamma = \infty$ geschnitten, deren Gleichungen sich homogen in der Form

21) $$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = \pm \sqrt{\frac{a-\gamma}{(a-\rho)(a-b)(a-c)}}$$

$$: \pm \sqrt{\frac{b-\gamma}{(b-\rho)(b-c)(b-a)}} : \pm \sqrt{\frac{c-\gamma}{(c-\rho)(c-a)(c-b)}} : 0$$

bezw.

22) $$\xi' : \eta' : \zeta' : \tau' = \pm \sqrt{\frac{(a-\varkappa)^3}{(a-\rho)(a-b)(a-c)}}$$

$$: + \sqrt{\frac{(b-\varkappa)^3}{(b-\rho)(b-c)(b-a)}} : + \sqrt{\frac{(c-\gamma)^3}{(c-\rho)(c-a)(c-b)}} : 0$$

darstellen, also als unendlich ferner Kegelschnitt und als unendlich ferne Kegelschnittevolute zu bezeichnen sind. Bei näherer Untersuchung erweist sich der Kegelschnitt als Rückkehrkante der Fläche, während die Fläche in den Punkten der Evolute im allgemeinen regulär ist.

Ist ρ ein Wert von b_1, so stellt 20) die Zentrafläche eines Ellipsoides dar. Reelle Werte ergeben sich für $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ nur, wenn γ und $\varkappa$ aus den Bereichen b_2 und b_3, aber nicht gleichzeitig aus demselben, entnommen, also beide endlich sind.

Demnach liegt die Fläche ganz im Endlichen, 21) und 22) sind imaginäre Kurven. Für den einen Mantel ist $c \leqq \gamma \leqq b$, $b \leqq \varkappa \leqq a$. Er schneidet die $\xi\eta$-Ebene in der Ellipsenevolute $\gamma = c$, die $\eta\zeta$-Ebene in der Ellipse $\varkappa = a$. Die Schnittkurve mit der $\xi\zeta$-Ebene setzt sich zusammen aus zwei symmetrischen Bögen $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ der Ellipse $\varkappa = b$, die deren Scheitel auf der ξ-Achse enthalten, und zwei symmetrischen Abschnitten $P_2 P_3$ und $P_1 P_4$ der Ellipsenevolute $\gamma = b$, die deren Spitzen auf der ζ-Achse enthalten (Fig. 28). Die Punkte P_i ergeben sich aus 20), wenn man für γ und $\varkappa$ den einzigen für beide gleichzeitig zulässigen Wert $\gamma = \varkappa = b$ einsetzt, und sind die Punkte, in denen sich die Kurven $\varkappa = b$ und $\gamma = b$ berühren, sodass die vier genannten Bögen stetig und mit stetig drehender Tangente ineinander übergehen.

Für den zweiten Mantel ist $c \leqq \varkappa \leqq b$, $b \leqq \gamma \leqq a$. Er hat mit der $\xi\eta$-Ebene die Ellipse $\varkappa = c$, mit der $\eta\zeta$-Ebene die Ellipsenevolute $\gamma = a$ gemein. Die Schnittkurve mit der $\xi\zeta$-Ebene besteht aus den stetig und mit stetig drehender Tangente ineinander übergehenden Bögen $P_2 P_3$ und $P_1 P_4$ der Ellipse $\varkappa = b$ mit deren Scheiteln auf der ζ-Achse und den Segmenten der Evolute $\gamma = b$ mit deren Spitzen auf der ξ-Achse (Fig. 29). In den Punkten P_i hängen die beiden Mäntel zusammen.

Liegt ρ zwischen b und c, so stellt 20) die Gleichungen der Zentrafläche eines einschaligen Hyperboloides dar. Damit $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ reell werden, muss entweder

$$-\infty \leqq \gamma \leqq c \qquad b \leqq \varkappa \leqq a$$

oder

$$b \leqq \gamma \leqq a \qquad -\infty \leqq \varkappa \leqq c$$

sein. Es ergibt sich hieraus einerseits, dass jeder der Mäntel die unendlich ferne Ebene in einer reellen Kurve schneidet, andererseits, dass die Mäntel auch im projektiven Raum nicht zusammenhängen, in dem Sinne, dass man längs einer stetigen reellen Kurve $\gamma = f(\varkappa)$ aus dem einen Mantel in den anderen übergehen kann. Der erste Mantel schneidet die $\xi\eta$-Ebene in der Ellipsenevolute $\gamma = c$; die Schnitte mit der $\eta\zeta$-Ebene und der $\xi\zeta$-Ebene sind je eine Hyperbel geworden (Fig. 33). Der andere Mantel (Fig. 34) schneidet die $\xi\eta$-Ebene in der Ellipse $\varkappa = c$. Die Schnittkurven mit der $\xi\zeta$-Ebene und der $\eta\zeta$-Ebene sind Hyperbelevoluten.

Den Übergang zwischen den beiden beschriebenen Typen bildet der Fall $\rho = c$. Die entsprechende „Fläche" im konfokalen System kann man entweder als Ellipsoid (Fokalallipse + doppelt überdecktes Inneres), oder als einschaliges Hyperboloid (Fokalellipse + doppelt überdecktes Äusseres) auffassen. In diesem Fall ist der eine Mantel (Fig. 31) der Zylinder über der Evolute der Fokalellipse, der andere der Zylinder über der Fokalellipse selbst (Fig. 32). Der Übergang von diesen Gebilden zu den Mänteln der Zentrafläche eines Hyperboloides ist leicht ersichtlich. Um uns zu verdeutlichen, wie die Zentrafläche eines Ellipsoides in dieses Grenzgebilde übergeht, lassen wir ρ ($< c$) gegen c konvergieren. Dann rücken die Scheitel und Spitzen der Kurven γ und $\varkappa = a$ oder b, die auf der 3-Achse liegen, immer weiter auseinander, so dass diese Kurven immer gestreckter werden, und da die anderen Scheitel im Endlichen bleiben, im Grenzfall je in das Paar paralleler Geraden durch die anderen Scheitel übergehen. Bei diesem Grenzübergang bewegen sich die Punkte P_i auf einer Kurve 4. Ordnung (Fig. 30) [1]) ins Unendliche, wobei sich ihre Abszissen paarweise den endlichen Werten $\xi = \pm\sqrt{\frac{(a-b)^3}{(a-c)^2}}$ nähern.

Liegt ρ zwischen a und b, ist also die Urfläche ein zweischaliges Hyperboloid, so ist entweder

$$-\infty \leqq \gamma \leqq c \qquad c \leqq \varkappa \leqq b \text{ (erster Mantel), oder}$$
$$c \leqq \gamma \leqq b \qquad -\infty \leqq \varkappa \leqq c \text{ (zweiter Mantel).}$$

Hieraus ergibt sich erstens, dass beide Mäntel sich ins Unendliche erstrecken, zweitens, dass sie im Endlichen stetig zusammenhängen und drittens, dass beide Mäntel aus zwei zur Ebene $\xi = 0$ symmetrischen Schalen bestehen, da ja die Schnittkurven der Mäntel mit der Ebene $\xi = 0$, nämlich die Kurven $\gamma = a$ und $\varkappa = a$ imaginär sind. Der erste Mantel schneidet die ξ 3-Ebene in einer Hyperbel $\varkappa = b$. Der Schnitt mit der $\xi\eta$-Ebene besteht aus zwei Bögen $Q_1 Q_2$ und $Q_3 Q_4$ einer Hyperbelevolute $\gamma = c$, die die Rückkehrpunkte auf der ξ-Achse

[1]) Diese Kurve ist in der Literatur unter dem Namen „Kohlenspitzkurve" bekannt, vergl. Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, Theorie und Geschichte, Bd. 1, S. 225.

enthalten, und vier von den Punkten Q_i ins Unendliche reichenden Hyperbelbogen der Hyperbel $\varkappa = c$ (Figur 37). Der zweite Mantel schneidet die $\xi\,\zeta$-Ebene in einer Hyperbelevolute $\gamma = b$. Die Schnittkurve mit der $\xi\,\eta$-Ebene besteht aus den Bögen $Q_1\,Q_2$ und $Q_3\,Q_4$ der Hyperbel $\varkappa = c$, die deren Scheitel enthalten, und den von den Punkten Q_i ins Unendliche reichenden Bogen der Kurve $\gamma = c$ (Fig. 38). Die Punkte Q_i sind die Punkte, in denen die beiden Mäntel zusammenhängen. Ihre Koordinaten ergeben sich aus 20) für $\gamma = \varkappa = c$.

Den Übergang zwischen den Typen der Zentrafläche eines einschaligen und der eines zweischaligen Hyperboloides bildet der Fall $\rho = b$. In diesem Falle entartet die Urfläche in die Fokalhyperbel mit ihrem doppelt überdeckten Innern (Grenzfall eines einschaligen Hyperboloides) oder mit ihrem doppelt überdeckten Äusseren (Grenzfall eines zweischaligen Hyperboloides). Die beiden Mäntel der Zentrafläche sind Zylinder senkrecht zur Ebene $\eta = 0$ über der Fokalhyperbel und deren Evolute (Fig. 35, 36). Nähert sich nämlich ρ ($< b$) dem Werte b, so rücken die Scheitel und Rückkehrpunkte der Kurven $\varkappa$ und γ gleich a oder c auf der η-Achse immer mehr ins Unendliche, so dass die Kurven $\varkappa = a$ und $\gamma = a$ im Grenzfall ganz verschwinden, während $\varkappa = c$ und $\gamma = c$ in Parallele zur η-Achse übergehen. Nähert sich $\rho > b$ dem Werte b, so rücken die Punkte Q_i auf einer Kurve vierter Ordnung[1]) (Fig. 39) mit vier Asymptoten ins Unendliche, während ihre Abszissen endlich bleiben, so dass also die Bogen $Q_1\,Q_2$ und $Q_3\,Q_4$ je in Geraden parallel zur η-Achse ausarten.

---

§ 2. Die Doppelkurve.

Um festzustellen, ob sich die beiden Mäntel der Zentrafläche durchdringen, suchen wir die Wertepaare $\varkappa_1, \gamma_1$ und $\varkappa_2, \gamma_2$, die dieselben reellen Werte ξ, η, ζ nach den Gleichungen 20) liefern. Das führt auf die Beziehungen

[1]) Diese Kurve ist in der Literatur unter dem Namen „Kreuzkurve" bekannt, vgl. Gino Loria a. a. O. S. 226.

a) $3(x_1+x_2)x_1x_2-(a+b+c)(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)$
$+3(ab+bc+ac)(x_1+x_2)-6abc=0$

23) b) $\gamma_1 = -\dfrac{abc(x_1-2x_2)+x_2^3(a+b+c-x_1-x_2)}{(a+b+c)x_1x_2-(ab+ac+bc)(x_1+x_2)+3abc}$

c) $\gamma_2 = -\dfrac{abc(x_2-2x_1)+x_1^3(a+b+c-x_1-x_2)}{(a+b+c)x_1x_2-(ab+ac+bc)(x_1+x_2)+3abc}$.

Zur Diskussion, ob es zulässige Werte $\gamma_1, x_1, \gamma_2, x_2$ gibt, die diesen Gleichungen genügen, deuten wir x_1 und x_2 in einer Ebene als rechtwinkelige Koordinaten. 23a) definiert in dieser eine Kurve 3. Ordnung, die zur Halbierungslinie des ersten und dritten Quadranten symmetrisch ist (Fig. 40—42). Sie hat drei Scheitel

$$A: x_1=x_2=a;\quad B: x_1=x_2=b;\quad C: x_1=x_2=c$$

und drei Asymptoten, nämlich die Geraden

$$1)\ x_1+x_2=\tfrac{2}{3}(a+b+c)$$
$$2)\ x_1=\tfrac{1}{3}(a+b+c)$$
$$3)\ x_2=\tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

die sich im Punkte S: $x_1=x_2=\frac{1}{3}(a+b+c)$ schneiden. Sie besteht aus drei Ästen, von denen zwei, die mit den Scheiteln A und C, die Asymptoten 2) und 3) haben und zusammen einer Hyperbel ähneln, während der dritte die Asymptote 1) hat.

Bei der weiteren Diskussion können wir uns aus den auf S. 29 erörterten Gründen auf die Halbebene $x_2 \leqq x_1$ beschränken.

Handelt es sich um die Zentrafläche eines Ellipsoides, so entsprechen höchstens solchen Punkten der x_1x_2-Ebene reelle Punkte der Fläche, wo $c \leqq x_1 \leqq a$ und $c \leqq x_2 \leqq a$ ist, d. h. Punkten des von den Geraden $x_1=a$, $x_2=c$ und $x_1=x_2$ gebildeten Dreiecks ACD. Von der Kurve 23 a) liegen in diesem erstens die Punkte A und C, für die $x_1=x_2=\gamma_1=\gamma_2=a$ oder c ist, denen also reelle Punkte der Fläche nicht entsprechen können. Zweitens verläuft in diesem Bereich ein Segment BΩ des Astes durch B. Dem Punkt B entspricht $x_1=x_2=\gamma_1=\gamma_2=b$, also die vier reellen Punkte P_i, in denen sich die Hauptschnitte der ξ_3-Ebene berühren. Für die Lage von Ω sind drei Fälle möglich.

1) kann Ω auf CD liegen. Das ist der Fall, wenn $(a-b) > (b-c)$ (Fig. 40). Denn dann liegt B zwischen C und S; B und D, also auch Ω und D liegen auf verschiedenen Seiten

der Asymptote 1), so dass Ω der Schnittpunkt CD mit der Kurve 23 a) ist. Daraus ergibt sich für Ω:

$$\varkappa_2' = c \qquad \varkappa_1' = b + \frac{(2a-b-c)(b-c)}{a+b-2c} < a$$

$$\gamma_2' = b + \left(\frac{2a-b-c}{a+b-2c}\right)^3 (b-c) < a \qquad \gamma_1' = c$$

Dem Punkt Ω entsprechen demnach vier reelle Punkte der $\xi\eta$-Ebene, die Schnittpunkte der Kurven $\gamma = c$ und $\varkappa = c$. Längs $B\Omega$ wächst $\varkappa_1$ von b bis $\varkappa_1'$, γ_2 von b bis γ_2', während $\varkappa_2$ und γ_1 von b bis c abnehmen. $(\gamma_1\ \varkappa_1)$ und $(\gamma_2\ \varkappa_2)$ sind also immer zulässige Parameterwertepaare, und zwar definiert $(\gamma_1\ \varkappa_1)$ immer einen Punkt des ersten, $(\gamma_2\ \varkappa_2)$ einen Punkt des zweiten Mantels, so dass $B\Omega$ die Durchdringungskurven der beiden Mäntel respräsentiert. Diese verbindet also in jedem Oktanten, in den die Symmetrieebenen die Fläche einteilen, den zu ihm gehörigen Punkt P_i mit dem zugehörigen Schnittpunkt der beiden Kurven $\gamma = c$ und $\varkappa = c$ in der $\xi\eta$-Ebene (Modell 5).

2) Ist $(a - b) = (b - c)$ (Fig. 41), so zerfällt die Kurve 3. Ordnung in eine Hyperbel mit den Scheiteln A und C und die Gerade $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{2}{3}(a + b + c)$ 2 b durch den mit B zusammengefallenen Punkt S. In diesem Falle liegt D auf der Geraden $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 2b$ und fällt mit Ω zusammen. Deshalb ist längs $B\Omega = BD$:

$$a \geqq \varkappa_1 \geqq b \qquad b \geqq \gamma_1 \geqq c$$
$$a \geqq \gamma_2 \geqq b \qquad b \geqq \varkappa_2 \geqq c.$$

$(\gamma_1\ \varkappa_1)$ liefern wieder Punkte des ersten, $(\gamma_2\ \varkappa_2)$ solche des zweiten Mantels. Dem Punkt D entspricht das jetzt beiden Mänteln gemeinsame Punktepaar, das die vier Kurven $\varkappa = a$, $\varkappa = c$, $\gamma = a$ und $\gamma = c$ gemein haben. Die Mäntel durchdringen sich also in einer Kurve, die in jedem Oktanten den dort liegenden Punkt P_i mit dem Scheitel auf der γ_i-Achse verbindet (Modell 6).

3) Ist $(a - b) < (b - c)$ (Fig. 42), so liegt B zwischen S und A und der Punkt Ω, in dem der Kurvenast mit dem Scheitel B aus dem Dreieck ACD austritt, auf der Geraden $\varkappa_1 = a$ zwischen A und D. Dann zeigt sich, dass längs $B\Omega$:

$$c < \gamma_1 < b - (a-b)\left(\frac{a+b-2c}{2a-b-c}\right)^3 \qquad b \leqq \varkappa_1 \leqq a$$

$$b \leqq \gamma_2 \leqq a \qquad c \leqq \varkappa_2 \leqq b - \frac{(a-b)(a+b-2c)}{2a-b-c}.$$

Dem Endpunkt Ω entsprechen die vier Punkte der Ebene $\xi = 0$, in denen sich die Kurven $\varkappa_1 = a$ und $\gamma_2 = a$ schneiden. Da $(\gamma_1 \varkappa_1)$ nur Punkte des ersten Mantels, $(\gamma_2 \varkappa_2)$ nur solche des zweiten Mantels liefern, repräsentiert $B\Omega$ die Durchdringungskurve der beiden Mäntel und diese verbindet die Punkte P_i mit den Schnittpunkten der Hauptschnitte in der Ebene $\xi = 0$ (Modell 7).

Durch analoge Ableitungen, wie in § 6 des ersten Abschnittes erweisen sich die Schnittpunkte der Hauptschnitte in der $\xi\eta$-Ebene bezw. in der $\eta\zeta$-Ebene als Rückkehrpunkte der Doppelkurve, die der $\xi\eta$-Ebene als Doppelpunkte, über die hinaus sich die Doppelkurve, isoliert von der Fläche, fortsetzt, wo die Koordinaten ihrer Punkte durch komplexe Werte von γ und $\varkappa$ geliefert werden.

Ist die Urfläche ein einschaliges Hyperboloid, so müssen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ entweder zwischen a und b liegen oder kleiner als c sein. Das zu untersuchende Gebiet der $\varkappa_1\varkappa_2$-Ebene zerfällt daher in drei Teile. Der erste ist das Dreieck $a \geqq \varkappa_1 \geqq b$, $a \geqq \varkappa_2 \geqq b$. In diesem Gebiet liegen von 23a) nur die Scheitel A und B, für die $\varkappa_1 = \varkappa_2$ $\gamma_1 = \gamma_2$ gleich a oder b ist, denen daher ein reeller Punkt der Zentrafläche (nach Seite 63) nicht entsprechen kann. Der zweite Teil ist das Gebiet $\varkappa_1 < c_1$, $\varkappa_2 \leqq \varkappa_1$, in dem nur der Scheitel C liegt; da für diesen ebenfalls $\varkappa_1 = \varkappa_2$ $\gamma_1 = \gamma_2$ und zwar gleich c ist, entspricht ihm auch kein reeller Flächenpunkt. Es bleibt noch der Streifen $b \leqq \varkappa_1 \leqq a$, $\varkappa_1 \leqq c$.

1. Ist $(a - b) > (b - c)$ (Fig. 40), so sahen wir S. 66, dass der Zweig der Kurve 23a) mit dem Scheitel B die Gerade $\varkappa_2 = c$ in einem Punkte Ω schneidet, für den $\varkappa_1$ zwischen a und b liegt, so dass in Ω die Kurve 23a) in den in Frage stehenden Bereich eintritt. Derselbe Ast schneidet, da er sich der Asymptote $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \frac{2}{3}(a + b + c)$ anschmiegt, die Gerade $\varkappa_1 = a$ in einem Punkte Φ, so dass ein endliches Stück $\Omega\Phi$ des Astes durch B in unserem Bereiche liegt. Dem Punkt Φ entsprechen nach 23) die Werte

$$\varkappa_1'' = a \qquad \varkappa_2'' = c - (a - c)\left(\frac{a + c - 2b}{2a - b - c}\right)$$

$$\gamma_1'' = c - (a - c)\left(\frac{a + c - 2b}{2a - b - c}\right)^3 \qquad \gamma_2'' = a,$$

er liefert also vier reelle Punkte, Schnittpunkte der Kurven

$\varkappa_1 = a$ und $\gamma_2 = a$, in denen die $\eta\zeta$-Ebene die Mäntel schneidet. Längs $\Phi\Omega$ ist

$$\varkappa_1' \leqq \varkappa_1 \leqq a, \quad c \geqq \gamma_1 \geqq \gamma_2'', \quad c \geqq \varkappa_2 \geqq \varkappa_2'', \quad \gamma_2' \leqq \gamma_2 \leqq a.$$

$(\gamma_1\, \varkappa_1)$ liefern also immer Punkte des ersten Mantels, $(\gamma_2\, \varkappa_2)$ solche des zweiten Mantels und $\Phi\Omega$ repräsentiert uns einen Teil der Durchdringungskurve der beiden Mäntel, der in jedem Oktanten der Fläche die Schnittpunkte der Kurven $\gamma = a$ und $\varkappa = a$, die dem Punkt Φ entsprechen, mit den Schnittpunkten der Kurven $\gamma = c$ und $\varkappa = c$, die dem Punkt Ω entsprechen, verbindet und somit aus zwei geschlossenen zur $\xi\zeta$-Ebene symmetrisch liegenden Zügen besteht. Ausser dem Bogen $\Phi\Omega$ tritt aber noch ein anderer Abschnitt der Kurve 23a) in den Bereich ein. Da für $(a - b) > (b - c)$ die Asymptote $\varkappa_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$ zwischen den Geraden $\varkappa_1 = a$ und $\varkappa_1 = b$ liegt, muss der Ast durch C in einem Punkt Ψ in den Bereich eintreten und von ihm ein unbegrenztes Segment, das sich der Asymptote $\varkappa_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$ anschmiegt, in dem Bereiche verlaufen. Ψ liegt auf der Geraden $\varkappa_1 = b$. Für ihn ist:

$$\varkappa_1 = b \qquad \varkappa_2 = c - (b - c)\frac{b + c - 2a}{2b - c - a} < c$$

$$\gamma_1 = c - (b - c)\left(\frac{2a - b - c}{a + c - 2b}\right)^3 \qquad \gamma_2 = b;$$

er repräsentiert also vier reelle Punkte der Ebene $\eta = 0$, in denen sich die Kurven $\varkappa = b$ und $\gamma = b$ schneiden. Dem unendlich fernen Punkt des Kurvensegmentes entsprechen die Werte

$$\gamma_1 = -\infty \qquad \varkappa_1 = \frac{1}{3}(a + b + c) \qquad \varkappa_2 = -\infty$$

$$\gamma_2 = a - \frac{(2a - b - c)^3}{a^2 + b^2 + c^2 - ac - ab - bc} = -b + \frac{(a + c - 2b)^3}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc};$$

er repräsentiert die vier reellen Schnittpunkte der reellen unendlich fernen Kurven 21) und 22). Längs des von Ψ ausgehenden Bogens nehmen $(\gamma_1\, \varkappa_1)$ für den ersten Mantel zulässige Wert an, $(\gamma_2\, \varkappa_2)$ solche, die für den zweiten Mantel zulässig sind. Diesem Bogen entspricht also ein zweiter Teil der Durchdringungskurve der beiden Mäntel, der in jedem Oktanten der Fläche den Schnittpunkt der Kurven $\gamma = b$ und $\varkappa = b$ mit dem Schnittpunkt der unendlich fernen Kurven verbindet und somit aus vier im

Endlichen getrennten Zügen besteht, die symmetrisch zur $\xi\eta$- und zur $\eta\zeta$-Ebene liegen. Die Punkte der Durchdringungskurven, die in den Symmetrieebenen oder in der unendlich fernen Ebene liegen, sind Rückkehrpunkte der Kurve. Man kann ähnlich wie im § 2 des zweiten Abschnittes zeigen, dass reelle Teile der Doppelkurve ausser den Durchdringungskurven der Mäntel nicht existieren.

2. Ist $(a - b) = (b - c)$ (Fig. 41), so fällt der Punkt Ω mit Φ in D zusammen. Die beiden geschlossenen Züge der Doppelkurve schrumpfen auf die gemeinsamen Scheitel $S_{y_1} = S_{y_2}$ der beiden Mäntel auf der η-Achse zusammen. Gleichzeitig wird die Asymptote $\varkappa_1 = \frac{1}{3}(a + b + c)$ mit der Geraden $\varkappa_1 = b$ identisch, Ψ fällt mit dem unendlich fernen Punkt des Zweiges durch C zusammen und die vier getrennten Äste entarten in zwei unendlich ferne Punkte, in die die vier reellen Schnittpunkte der Kurven 21) und 22) übergehen.

3. Ist $(a - b) < (b - c)$ (Fig. 42), so liegt kein Punkt der Kurve 23a) im zu untersuchenden Bereiche. Die Mäntel durchdringen sich nicht und die Doppelkurve hat überhaupt keine reellen Äste.

Für das zweischalige Hyperboloid ist der in Frage kommende Bereich der Bereich

$$\varkappa_1 \leqq b \qquad \varkappa_2 \leqq \varkappa_1.$$

In ihm liegt erstens der Punkt B, für den $\varkappa_1 \quad \varkappa_2 = \gamma_1 = \gamma_2 \quad b$ ist, der also nach Seite 64 einen reellen Punkt der Fläche nicht liefern kann. Zweitens liegt in dem Bereich ein Segment des Astes durch C.

1. Ist $(a - b) > (b - c)$, so ist dieses das Segment $C\Psi$. Da für $C: \varkappa_1 \quad \varkappa_2 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 = c$ ist, dieser Punkt also die reellen Berührungspunkte Q_i der Hauptschnittkurven beider Mäntel in der Ebene $\zeta = 0$ repräsentiert, gilt längs $C\Psi$:

$$c - (b-c)\left(\frac{2a-b-c}{a+c-2b}\right)^3 \leqq \gamma_1 \leqq c \qquad c \leqq \gamma_2 \leqq b$$

$$c \leqq \varkappa_1 \leqq b \qquad\qquad c - (b-c)\frac{2a-b-c}{a+c-2b} \geqq \varkappa_2 \geqq c.$$

$(\gamma_1 \varkappa_1)$ liefern Punkte des ersten, $(\gamma_2 \varkappa_2)$ Punkte des zweiten Mantels und $C\Psi$ entspricht eine Durchdringungskurve der beiden Mäntel,

die in jedem Oktanten der Fläche den in ihm liegenden Punkt Q_i mit dem in ihm liegenden reellen Schnittpunkt der Kurven $\varkappa = b$ und $\gamma = b$ in der $\xi 3$-Ebene verbindet.

2. Ist $(b - c) = (a - b)$ (Fig. 41), so ist die Gerade $\varkappa_1 = b$, die den Bereich begrenzt, Asymptote des Astes durch C, $\mathfrak{F}$ ist ins Unendliche gerückt. Dem entspricht, dass die vier reellen Schnittpunkte der Kurven $\varkappa = b$ und $\gamma = b$ in zwei unendlich ferne zusammengefallen sind. Und die Durchdringungskurve erstreckt sich von den Punkten Q_i in acht Bögen nach diesen zwei unendlich fernen Punkten in der $\xi 3$-Ebene.

3. Ist $(a - b) < (b - c)$ (Fig. 42), so liegt wiederum der ganze Halbast durch C innerhalb des Bereiches, seinem unendlich fernen Punkte entspricht aber jetzt der Wert $\varkappa_1 = \frac{1}{3}(a+b+c) < b$. Dieser repräsentiert demnach vier (reelle) Punkte der unendlich fernen Ebene, die reellen Schnittpunkte der Kurve 21) und 22). Die Doppelkurve verbindet diese mit den Punkten Q_i, so dass sie als Durchdringungskurve der Mäntel aus vier im Endlichen getrennten Ästen besteht.

Die Durchdringungskurve erschöpft aber nicht die ganze Doppelkurve. Diese wird vielmehr von den Punkten Q_i aus, die Doppelpunkte der Kurve sind, durch isolierte Äste fortgesetzt, deren Koordinaten sich aus 20) für eine gewisse einfache Mannigfaltigkeit komplexer Werte von $\varkappa$ und γ ergeben.

Degenerieren für $\rho = b$ oder $\rho = c$ die beiden Mäntel in Zylinder, so zerfällt die Doppelkurve in vier gemeinsame Erzeugende, die für $(a - b) > (b - c)$ reell und von einander verschieden sind, für $(a - b) = (b - c)$ zu je zweien zusammenfallen und für $(a - b) < (b - c)$ imaginär werden.

---

§ 3. Bemerkungen zu den Modellen.

Die verschiedenen, durch den Verlauf der Doppelkurve bestimmten Typen sind für das Ellipsoid in den Modellen 5—7 dargestellt. Da sich wegen der im Endlichen auftretenden Singularitäten zwischen den Zentraflächen des elliptischen Paraboloides und des Ellipsoides grosse Übereinstimmung zeigt, konnte

darauf verzichtet werden, die Mäntel einzeln zu modellieren. Ähnlich wie bei der Zentrafläche zum elliptischen Paraboloid sind in einem Oktanten die in den übrigen unsichtbaren Teile der Fläche freigelegt. Einige Parameterkurven sind aufgezeichnet und die beiden Mäntel durch verschiedene Farben gekennzeichnet. Die $\xi\,\eta$-Ebene liegt parallel zur Grundplatte. Für Modell 5 ist $(a - b) > (b - c)$. Ihm liegen als Achsen des Ellipsoides $\sqrt{a} = 20$, $\sqrt{b} = 18$ und $\sqrt{c} = 16$ zu Grunde, so dass $a - b = 76$, $b - c = 68$ ist. Für Modell 6 ist $\sqrt{a} = 20$, $\sqrt{b} = 18$, $\sqrt{c} = 15{,}75$, also $(a - b) = (b - c) = 76$, während bei Modell 7 $\sqrt{a} = 20$, $\sqrt{b} = 18$, $\sqrt{c} = 15$ cm und damit $(a - b) = 76 < (b - c) = 99$ ist.

Auf die Herstellung von Modellen für die Zentraflächen der Hyperboloide konnte verzichtet werden. Für den Fall $(a - b) < (b - c)$ sind Modelle für die Zentrafläche eines einschaligen Hyperboloides von Herrn v. Dyk angefertigt. Die beiden anderen Fälle würden nichts Neues bieten. Da die Zentrafläche eines zweischaligen Hyperboloides aus zwei Schalen besteht, die sich äusserlich für $(a - b) > (b - c)$ gar nicht von der des elliptischen Paraboloides unterscheiden, während für $(a - b) \leq (b - c)$ sich zwar die Doppelkurve ins Unendliche zieht, sich aber sonst auch nichts Neues bietet, erschien ein Modellieren auch dieser Flächen überflüssig [1]).

[1]) Erst nach Beginn des Druckes wurde mir bekannt, dass ein Modell zur Zentrafläche des dreiaxigen Ellipsoides, 1862 von H. A. Schwarz ausgeführt, bereits im mathematischen Institut der Technischen Hochschule in München vorhanden ist (Vgl. den von Herrn Dyk im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegebenen Katalog math. u. phys. Modelle usw. S. 282, No. 197).

Lebenslauf.

Ich, Hans Adolf August Schröder, wurde am 25. Mai 1887 zu Erfurt als Sohn des 1891 verstorbenen Lehrers Adolf Schröder geboren. Ich besuchte in Erfurt zuerst die I. Knaben-Bürgerschule, dann bis Ostern 1905 das Kgl. Realgymnasium und studierte darauf in Göttingen Mathematik und Physik. Ich besuchte dort Vorlesungen und Übungen der Herren:

Abraham, Ambronn, Baumann, Berthold, Blumenthal, Boruttau, Friedrichsen, Guerrey, Herglotz, Hilbert, Hoffmann, Husserl, Klein, Koebe, Minkowski, G. E. Müller, Rhumbler, Riecke, Runge, Schwarzschild, Stimming, Vermeil, Verworn, Voigt und Wiechert.

Besondere Anregungen empfing ich von Herrn Geh. Reg.-Rat C. Runge, dessen Assistent ich mehrere Semester lang war. Nachdem ich im November 1908 das Examen für Kandidaten des Lehramtes an höheren Schulen bestanden hatte, war ich von Januar 1909 bis September 1909 und von Oktober 1911 bis März 1912 Assistent für den Unterricht in darstellender Geometrie und graphischer Statik an der Kgl. Technischen Hochschule in Danzig. In der Zwischenzeit genügte ich meiner Dienstpflicht in Erfurt und leistete das Seminarjahr am Fürstl. Gymnasium in Wernigerode a. H. ab. Seit 1. April 1912 bin ich Oberlehrer am Reformrealgymnasium in Halle a. d. S.

In Danzig empfing ich von Herrn Prof. Schilling die Anregung zur vorliegenden Arbeit; ich spreche ihm auch an dieser Stelle dafür und für die vielseitigen Förderungen, die ich von ihm erhielt, während der Zeit, die ich unter ihm arbeitete, meinen ergebensten Dank aus.

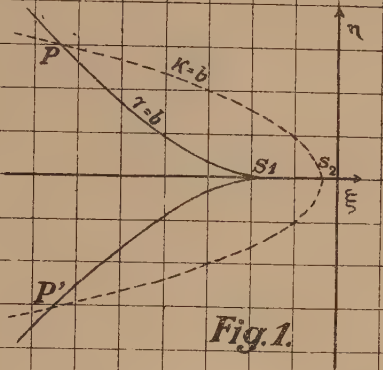


Fig. 1.

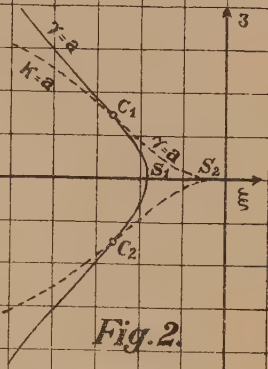


Fig. 2.

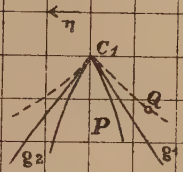


Fig. 3.

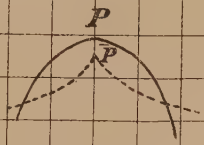


Fig. 4.

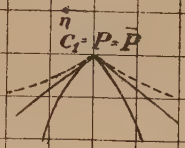


Fig. 5.

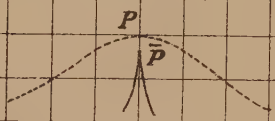


Fig. 6.

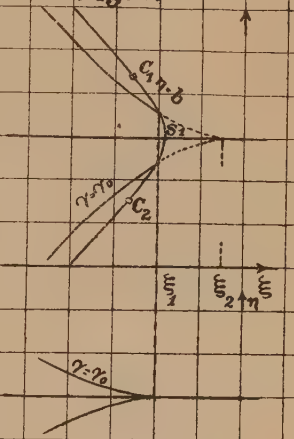


Fig. 7.

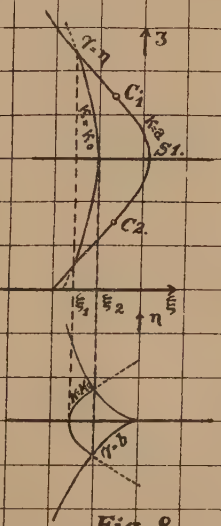


Fig. 8.

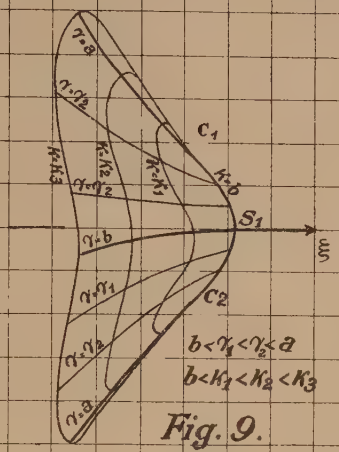


Fig. 9.

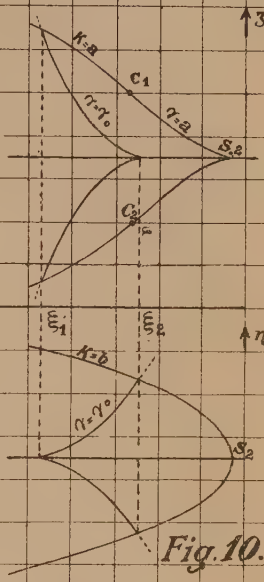


Fig. 10.

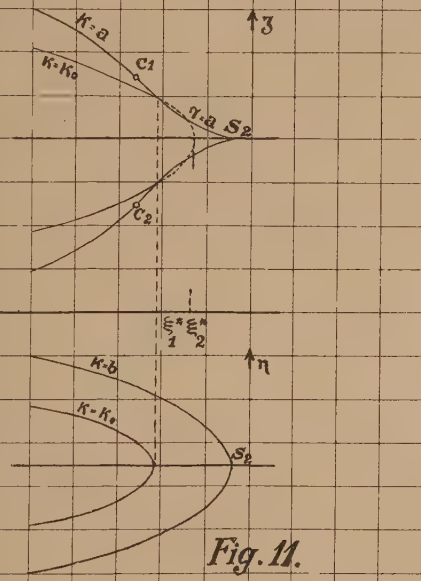


Fig. 11.

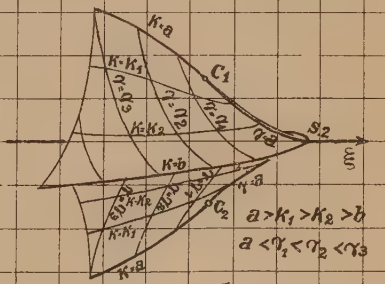


Fig. 12.

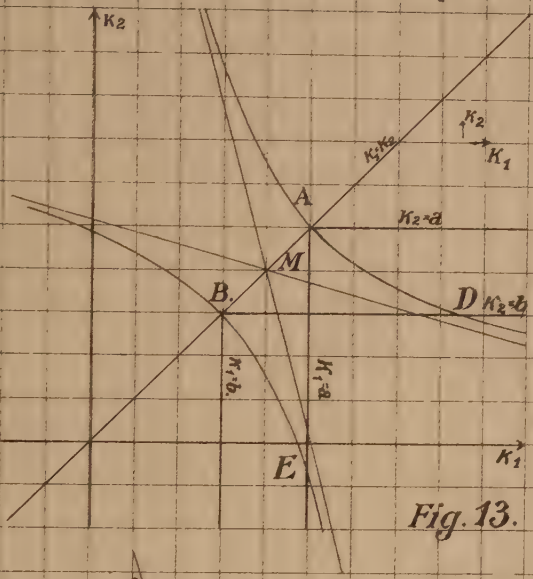


Fig. 13.

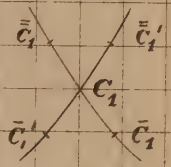


Fig. 14.

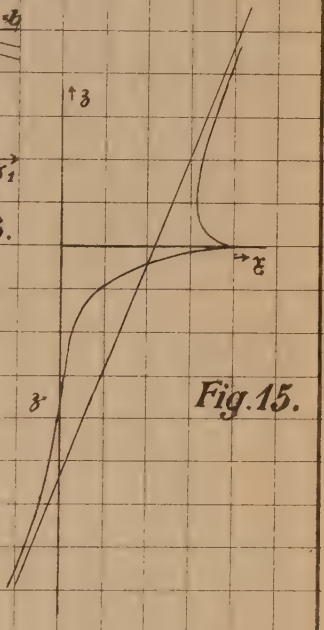


Fig. 15.

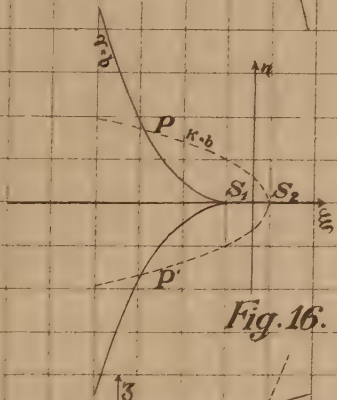


Fig. 16.

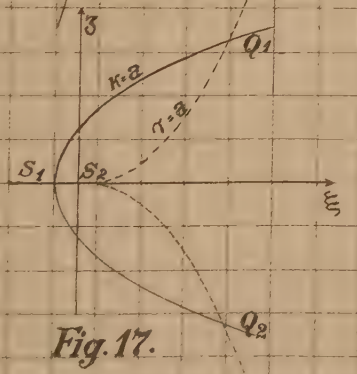


Fig. 17.

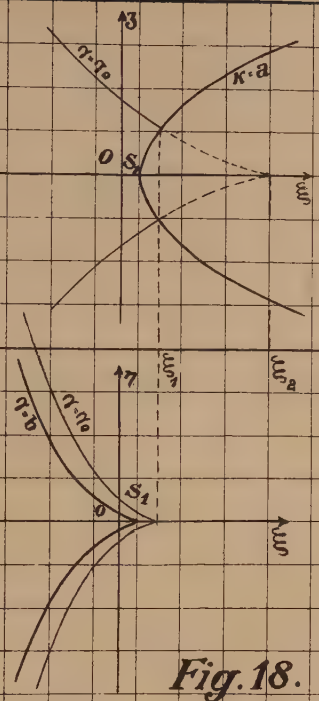


Fig. 18.

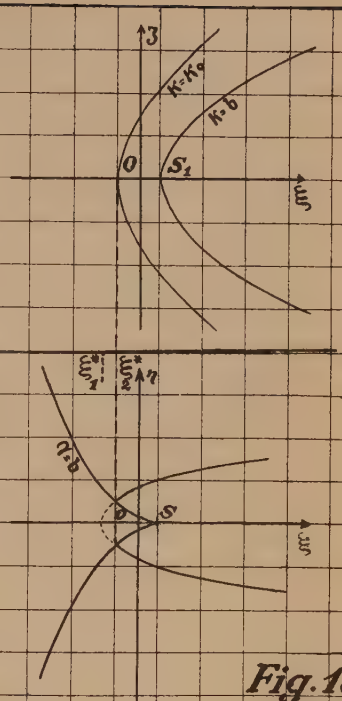


Fig. 19.

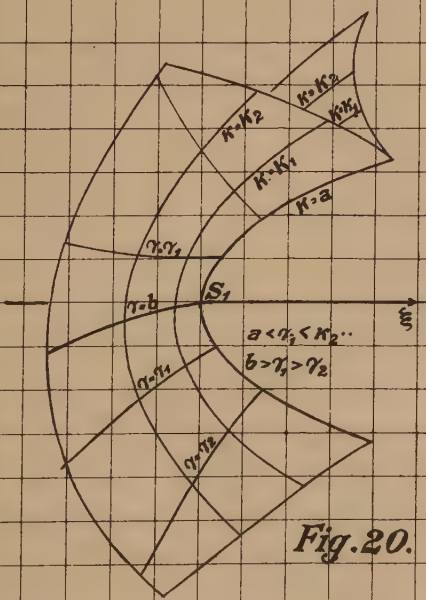


Fig. 20.

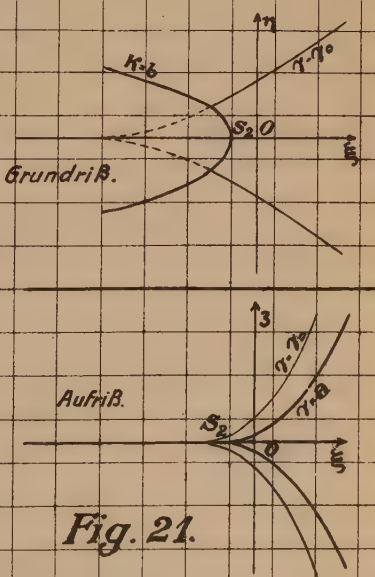


Fig. 21.

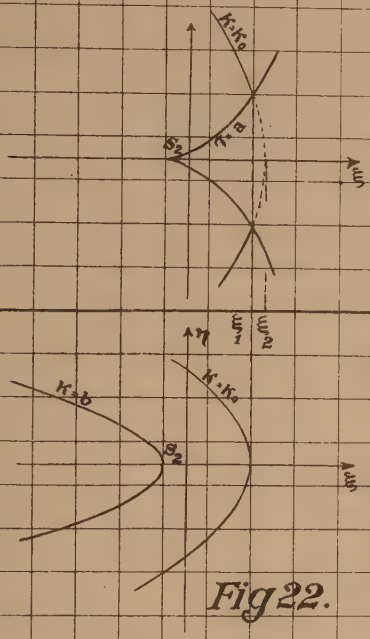


Fig 22.

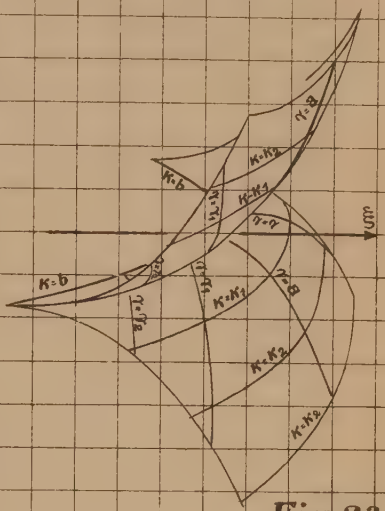


Fig. 23.

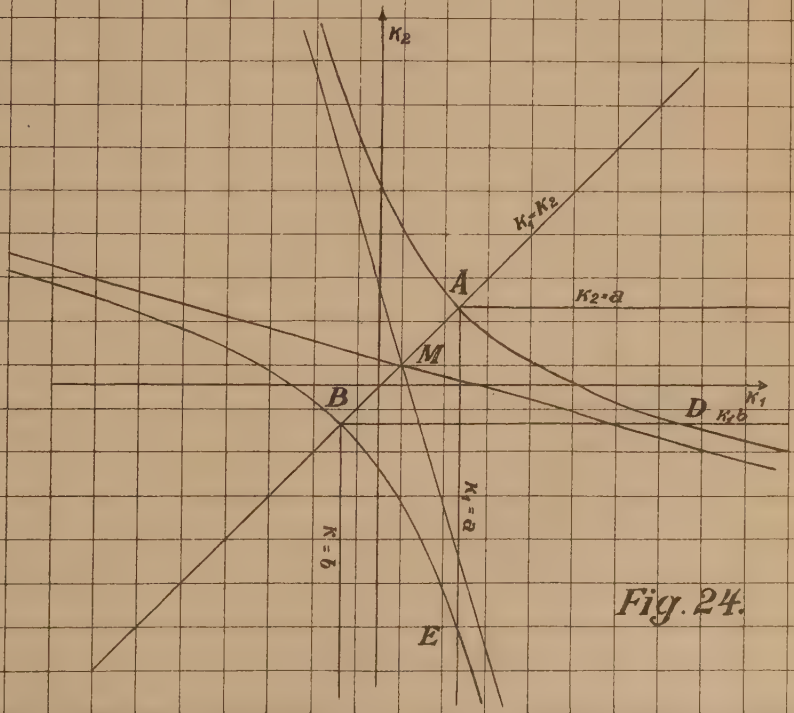


Fig. 24.

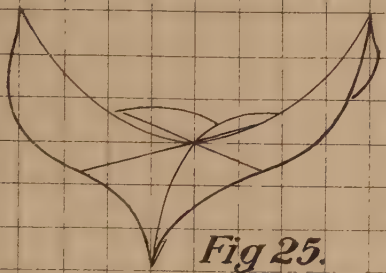


Fig 25.

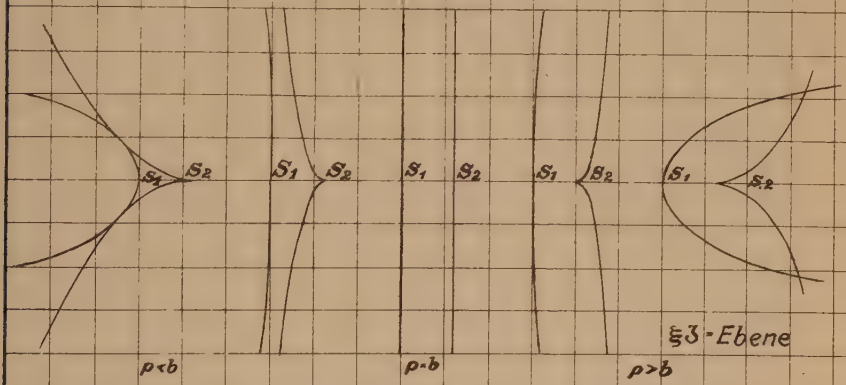


Fig. 26.

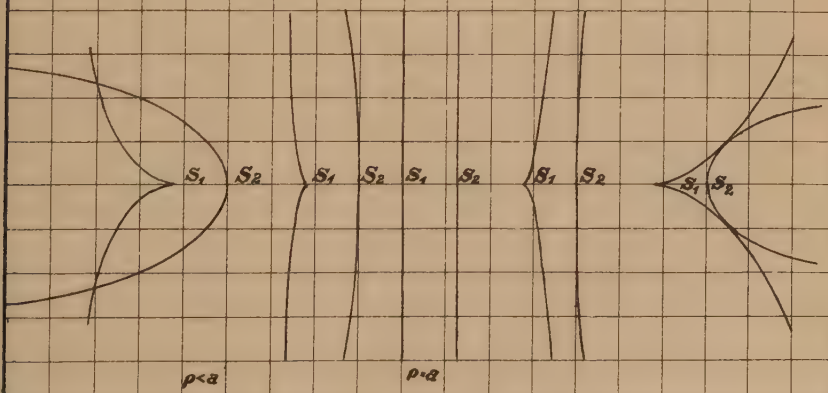


Fig. 27.

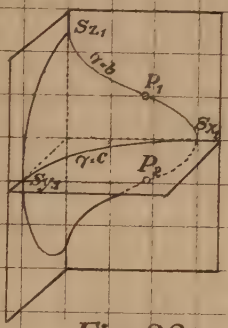


Fig. 28.

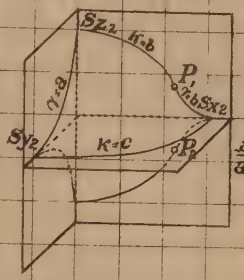


Fig. 29.

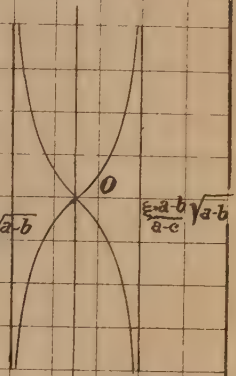


Fig. 30.

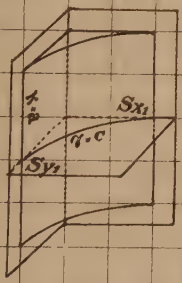


Fig. 31.

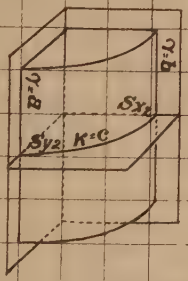


Fig. 32.

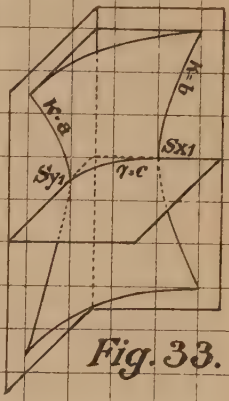


Fig. 33.

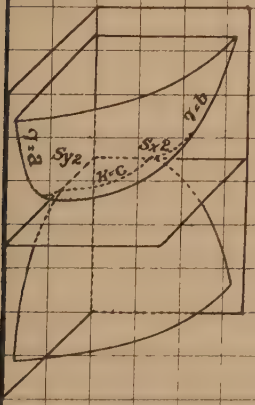


Fig. 34

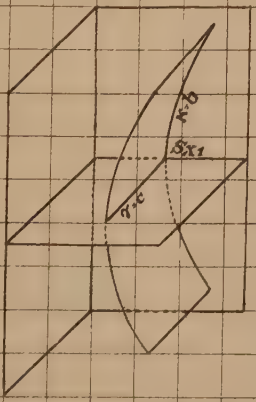


Fig. 35.

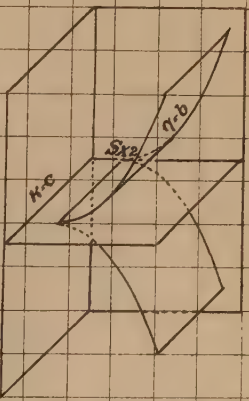


Fig. 36.

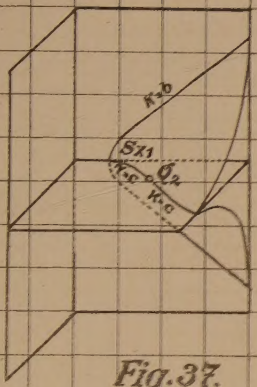


Fig. 37.

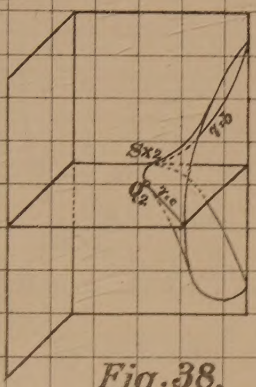


Fig. 38.

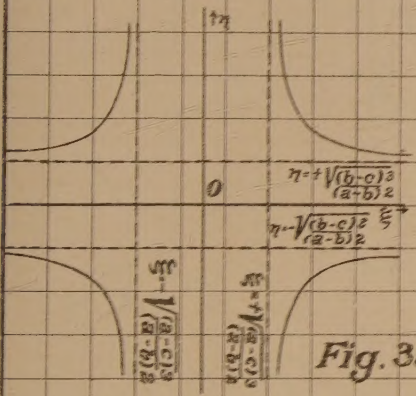


Fig. 39.

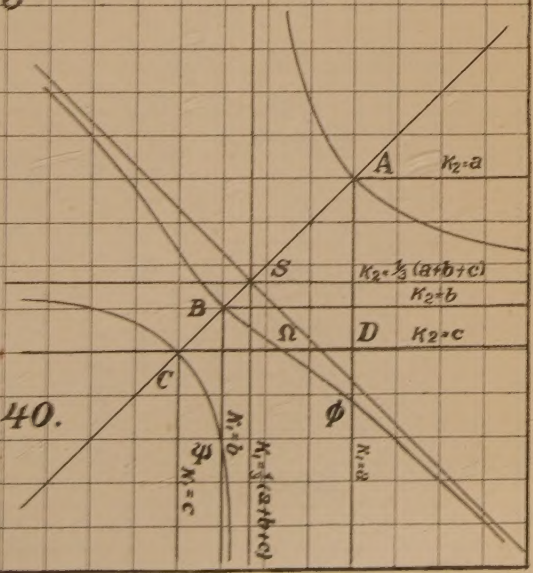


Fig. 40.

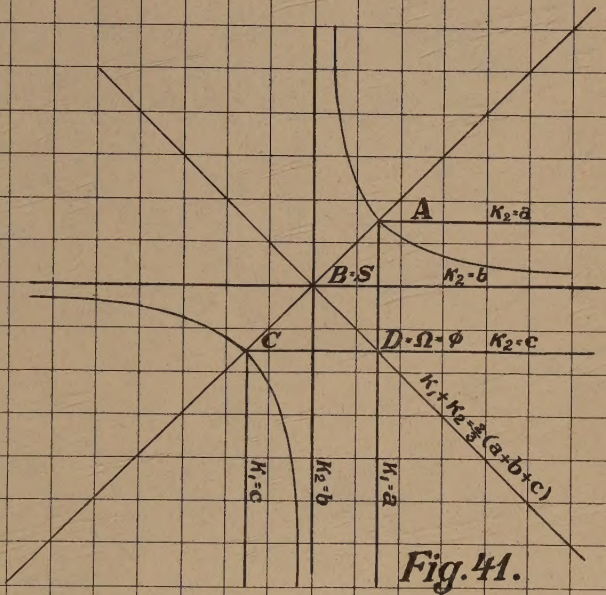
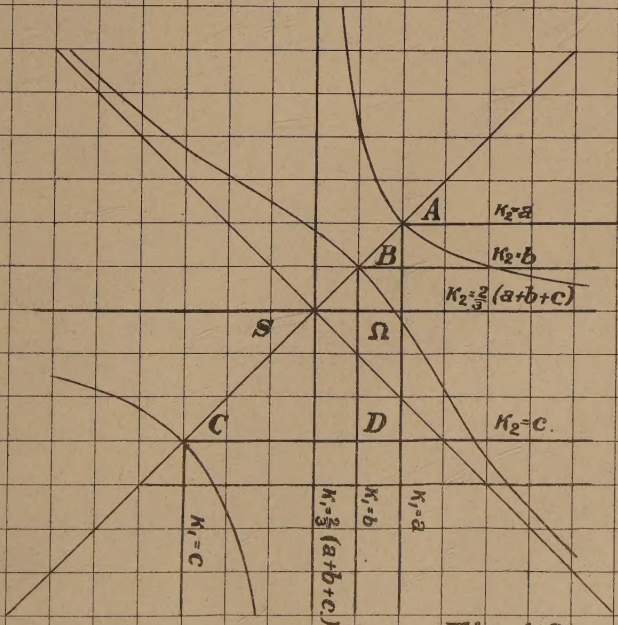

A
$K_2=a$
B·S
$K_2=b$
C
D·Ω·φ
$K_2=c$
$K_1+K_2=\frac{2}{3}(a+b+c)$
$K_1=c$
$K_2=b$
$K_1=a$

Fig. 41.


A
$K_2=a$
B
$K_2=b$
$K_2=\frac{2}{3}(a+b+c)$
S
Ω
C
D
$K_2=c$.
$K_1=c$
$K_1=\frac{2}{3}(a+b+c)$
$K_1=b$
$K_1=a$

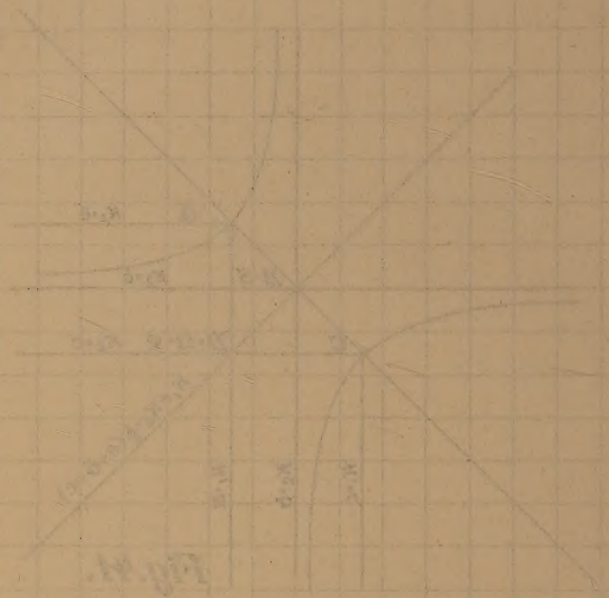



Fig. 42.